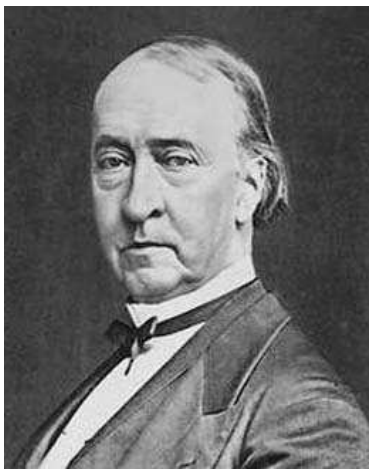
Kapitel 1
Was ist Topologie?

Die Topologie ist, verglichen etwa mit der Geometrie und der Zahlentheorie, ein sehr junges Teilgebiet der Mathematik; der erste mathematische Satz, den man nach heutigem Verständnis der Topologie zurechnen würde, war EULERs Lösung des Königsberger Brückenproblems, mit der wir uns zu Beginn von Kapitel 4 genauer beschäftigen werden. Er veröffentlichte sie 1736 unter dem Titel *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* (Lösung eines Problems bezüglich der Geometrie der Lage). Später wurden ähnliche Probleme oft unter dem Oberbegriff *Analysis situs* zusammengefaßt; unter diesem Titel erschien auch ab 1895 eine Reihe von Arbeiten von HENRI POINCARÉ, in denen er als Erster das Gebiet systematisch behandelte, das wir heute als algebraische Topologie bezeichnen.

LEONHARD EULER (1707–1783) wurde in Basel geboren und ging auch dort zur Schule und, im Alter von 14 Jahren, zur Universität. Dort legte er zwei Jahre später die Magisterprüfung in Philosophie ab und begann mit dem Studium der Theologie; daneben hatte er sich seit Beginn seines Studium unter Anleitung von JOHANN BERNOULLI mit Mathematik beschäftigt. 1726 beendete er sein Studium in Basel und bekam eine Stelle an der Petersburger Akademie der Wissenschaften, die er 1727 antrat. Auf Einladung FRIEDRICHS DES GROSSEN wechselte er 1741 an die preußische Akademie der Wissenschaften; nachdem sich das Verhältnis zwischen den beiden dramatisch verschlechtert hatte, kehrte er 1766 nach St. Petersburg zurück. Im gleichen Jahr erblindete er vollständig; trotzdem schrieb er rund die Hälfte seiner zahlreichen Arbeiten (Seine gesammelten Abhandlungen umfassen 73 Bände) danach. Sie enthalten bedeutende Beiträge zu zahlreichen Teilgebieten der Mathematik, Physik, Astronomie und Kartographie.

JULES HENRI POINCARÉ (1854–1912) wurde im lothringischen Nancy geboren, besuchte dort das heute nach ihm benannte Gymnasium und studierte von 1873 bis 1875 an der Ecole Polytechnique, danach an der Ecole des Mines in Paris. Sodann arbeitete er gleichzeitig als Mineningenieur und an einer Dissertation über Differentialgleichungen bei CHARLES HERMITE (1822–1901); letztere wurde 1879 von der Universität Paris angenommen. Seine erste mathematische Stelle war an der Universität Caen; danach folgten Professuren in Paris, die er bis zu seinem frühen Tod innehatte. Er leistete wesentliche Beiträge zur Theorie der Differentialgleichungen, begründete die algebraische Topologie, publizierte über Physik, blieb Zeit seines Lebens dem Bergbau verbunden und veröffentlichte auch einige philosophische Abhandlungen. Sein Grab auf dem Friedhof von Montparnasse ist heute noch erhalten.

Der Name *Topologie* von τοπος, der Ort, und λογος, die Lehre, geht zurück auf JOHANN BENEDICT LISTING, der 1847 eine Arbeit mit dem Titel *Vorstudien zur Topologie* veröffentlichte, das Wort *Topologie* aber bereits ab etwa 1836 immer wieder in seinen Briefen gebraucht hatte. In den allgemeinen Gebrauch kam das Wort erst ab etwa 1940, nicht zuletzt auf Grund der Bemühungen des BOURBAKI-Kreises, der in seinem (noch immer unvollendeten und wohl auch unvollendet bleibenden) Werk *Les fondations de l'Analyse* die Analysis in größtmöglicher Allgemeinheit neu aufbaute auf Grundlage der Algebra und der Topologie.



JOHANN BENEDICT LISTING (1808–1882) wurde in Frankfurt geboren und ging auch dort aufs Gymnasium; 1830 begann er mit dem Studium der Mathematik und der Architektur an der Universität Göttingen, wo er allerdings auch Vorlesungen aus zahlreichen anderen Gebieten belegte. Sein wichtigster mathematischer Lehrer war GAUSS, der zwar selbst nie etwas über Topologie veröffentlichte, aber doch eine ganze Reihe von Ideen zu diesem Gebiet beisteuerte. Als 1837 Victoria Königin von England und ihr Onkel Herzog von Hannover wurde, protestierte unter anderem der Göttinger Physiker WILHELM EDUARD WEBER (1804–1891), der gemeinsam mit GAUSS den Telegraphen erfunden hatte, gegen die Aufhebung der liberalen Hannoveraner Verfassung und verlor deshalb seine Stelle; auf Fürsprache von GAUSS wurde LISTING sein Nachfolger und publizierte seither auch auf dem Gebiet der Physik.

NICOLAS BOURBAKI ist das Pseudonym einer Gruppe junger französischer Mathematiker, die ab 1935 an einen neuen Neuaufbau der Mathematik arbeiteten. Obwohl dabei anfangs vor allem die Lehre im Vordergrund stand, war ihr wesentlicher Grundsatz, alles so allgemein wie möglich zu formulieren und zu beweisen und zusätzliche Annahmen nur einzuführen, wo sie unbedingt erforderlich sind. Um Alterserscheinungen zu vermeiden, müssen alle Mitarbeiter im Alter von vierzig Jahren ausscheiden, so daß die aktiven Mathematiker stets jünger sind. Die Arbeit am großen Grundlagenwerk scheint derzeit eingestellt zu sein; inzwischen organisiert BOURBAKI im wesentlichen nur noch ein viermal jährlich in Paris stattfindendes Seminar, in dem prominente Mathematiker über ein Thema ihrer Wahl, aber nicht ihre eigenen Arbeiten, vortragen.

Die Topologie untersucht, informell ausgedrückt, jene Eigenschaften von Kurven, Flächen, Körpern und auch komplizierteren Mengen, die unter stetigen Deformationen erhalten bleiben.

Wenn wir uns der Einfachheit halber zunächst auf Teilmengen der Räume $\mathbb{R}^n$ beschränken, können wir das folgendermaßen präzisieren:

Definition: Zwei Mengen $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ heißen *homöomorph*, wenn es stetige Abbildungen $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to X$ gibt derart, daß $f \circ g$ die Identität auf Y ist und $g \circ f$ die Identität auf X.

Insbesondere sind f und g also bijektiv; wichtig ist aber vor allem, daß *beide* Abbildungen stetig sind: Die Abbildung

$$f\colon \begin{cases} [0,\, 2\pi) \to \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1\right\} \\ \qquad t \mapsto (\cos t, \sin t) \end{cases}$$

etwa vom halboffenen Intervall $[0,\, 2\pi)$ auf die Kreislinie ist stetig und bijektiv, aber ihre Umkehrabbildung ist im Punkt $(1,0)$ nicht stetig, denn die Punkte $\big(\cos(2\pi - \frac{1}{n}), \sin(2\pi - \frac{1}{n})\big)$ haben zwar für alle $n \in \mathbb{N}$ Urbild $2\pi - \frac{1}{n}$, aber ihr Grenzwert $(1,0)$ hat die Null als Urbild.

Als erstes Beispiel zweier homöomorpher Mengen betrachten wir den n-dimensionalen Würfel

$$W = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; 0 \le x_i \le 1 \;\text{ für alle } i\right\}$$

und für beliebige positive reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ den Quader

$$Q = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; 0 \le x_i \le a_i \;\text{ für alle } i\right\}.$$

Offensichtlich sind die Abbildungen

$$f\colon \begin{cases} W \to Q \\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (a_1 x_1, \ldots, a_n x_n) \end{cases} \quad \text{und}$$

$$g\colon \begin{cases} Q \to W \\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \left(\frac{x_1}{a_1}, \ldots, \frac{x_n}{a_n}\right) \end{cases}$$

stetig und zueinander invers; der Würfel und der Quader sind also homöomorph. Damit ist schon einmal klar, daß Längen und Längenverhältnisse keine topologischen Eigenschaften sind.

Allgemeiner können wir beliebige affine Abbildungen

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ x \mapsto Ax + b \end{cases}$$

mit einer invertierbaren $n \times n$-Matrix A und einem Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ betrachten; offensichtlich ist dann jede Teilmenge $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ homöomorph zu ihrem Bild $\varphi(Z)$, denn sowohl φ als auch seine Umkehrabbildung, die $y \in \mathbb{R}^n$ abbildet auf $A^{-1}(y - b)$, sind stetig. Somit ist auch die Lage im $\mathbb{R}^n$ topologisch irrelevant, genauso wie Winkel, denn wir können beispielsweise durch eine affine Abbildung ein Rechteck in ein Parallelogramm scheren.

Auch die Kugel

$$K = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\right\}$$

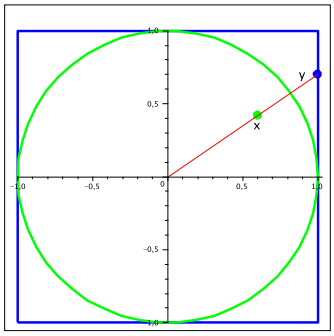
ist homöomorph zu W (und damit auch zu Q); hier lassen sich die Abbildungen $K \to W$ und $W \to K$ am besten geometrisch beschreiben: Zunächst einmal ist W homöomorph zum Würfel

$$W' = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; -1 \leq x_i \leq 1 \text{ für alle } i\right\}$$

über die affine Transformation $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die jede Koordinate x_i auf $2x_i - 1$ abbildet, und diesen Würfel bilden wir dann folgendermaßen ab auf die Kugel:

Der Nullpunkt des $\mathbb{R}^n$ wird auf sich selbst abgebildet; für jeden anderen Punkt $x = (x_1, \ldots, x_n) \in W'$ betrachten wir den Strahl vom Nullpunkt

durch diesen Punkt; sein Schnittpunkt mit dem Rand des Würfels sei y und d sei sein Abstand zum Nullpunkt. Dann wird x abgebildet auf den Punkt dx; wir strecken also den Strahl vom Nullpunkt durch x in so einem Verhältnis, daß der Schnittpunkt mit der Kugel auf den Schnittpunkt mit dem Würfel abgebildet wird. Bei der Umkehrabbildung wird der Strahl entsprechend um den Faktor d gestaucht.

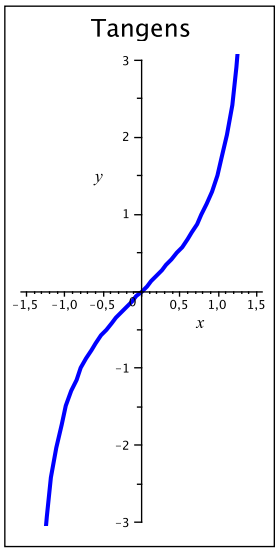


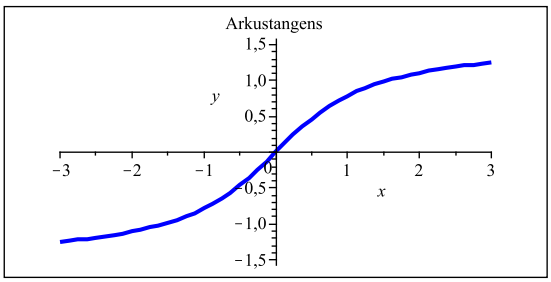
Damit ist auch klar, daß Kanten, Ecken und ähnliches keine Begriffe sind, die unter Homöomorphismen erhalten bleiben.

Auch Beschränktheit ist keine topologische Eigenschaft, denn die Tangensfunktion bildet das Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ stetig und bijektiv ab auf ganz $\mathbb{R}$ mit dem ebenfalls stetigen Arkustangens als Umkehrfunktion. Entsprechend können wir den offenen Würfel

$$W'' = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \;\middle|\; -\tfrac{\pi}{2} < x_i < \tfrac{\pi}{2} \quad \text{für alle } i\right\}$$

homöomorph abbilden auf den ganzen $\mathbb{R}^n$, indem wir die i-te Koordinate x_i ersetzen durch $\tan x_i$.



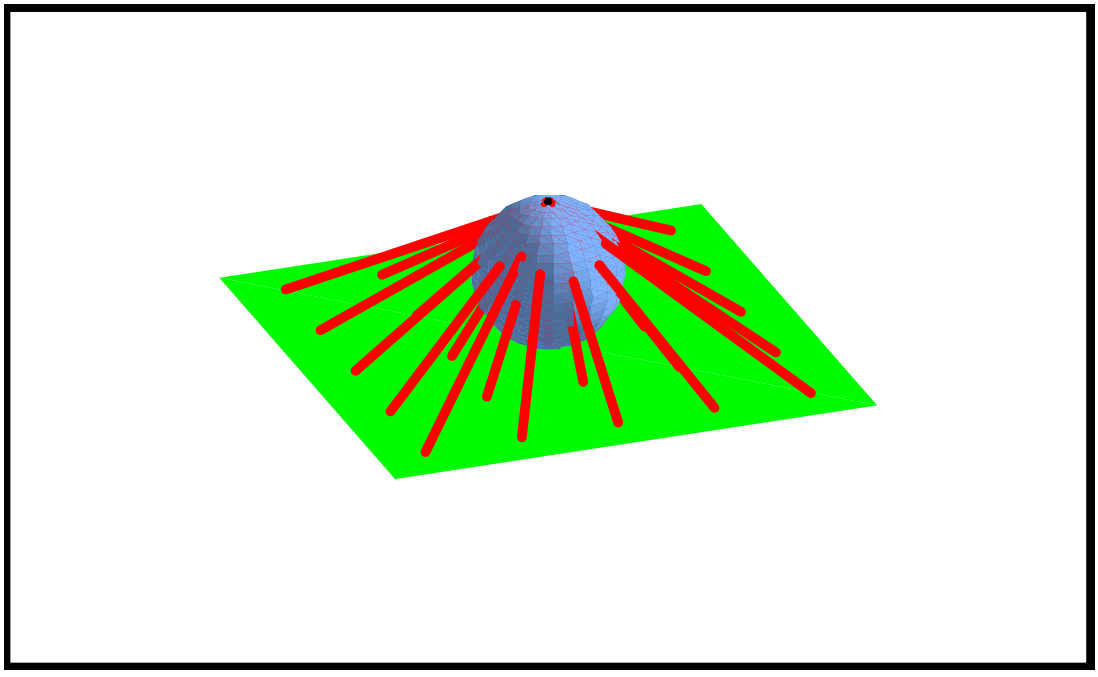


Der offene Würfel W'' ist allerdings weder homöomorph zu W noch zu W', denn diese beiden Würfel sind kompakt und werden damit auch von jeder stetigen Abbildung wieder auf kompakte Mengen abgebildet. Daher kann es weder eine surjektive stetige Abbildung von W nach W'' noch eine von W' nach W'' geben. Aus dem gleichen Grund sind beiden Würfel nicht homöomorph zu $\mathbb{R}^n$.

Die Kugeloberfläche

$$\mathbb{S}^2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$$

kann nicht homöomorph zu $\mathbb{R}^2$ sein, denn auch $\mathbb{S}^2$ ist eine kompakte Menge. Entfernt man aber nur einen Punkt von $\mathbb{S}^2$, etwa den Nordpol $N = (0, 0, 1)$, so ist $\mathbb{S}^2 \setminus N$ homöomorph zu $\mathbb{R}^2$: Wir identifizieren $\mathbb{R}^2$ mit der Ebene $z = -1$ in $\mathbb{R}^3$, also der Menge aller Punkte der Form $(x, y, -1) \in \mathbb{R}^3$, und bilden den Punkt $P \in \mathbb{S}^2 \setminus N$ ab auf den Schnittpunkt der Geraden NP mit der Ebenen E. In Gegenrichtung wird der Punkt $Q \in E$ abgebildet auf den Schnittpunkt der Geraden NQ mit $\mathbb{S}^2$. Offensichtlich ist auch diese *stereographische Projektion* $\mathbb{S}^2 \setminus N \to E$ ein Homöomorphismus.

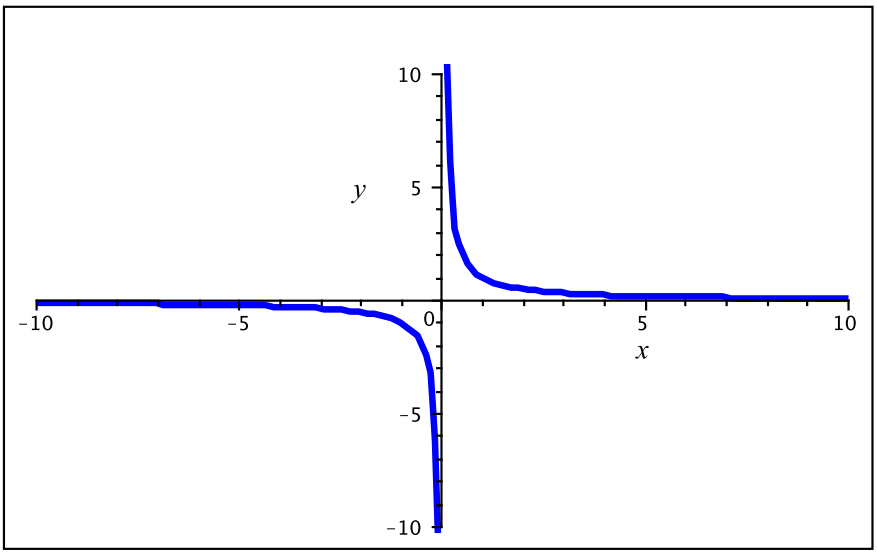


Die Hyperbel $H = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; xy = 1\right\}$ ist homöomorph zu $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

via der beiden Abbildungen

$$f\colon \begin{cases} H \to \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ (x,y) \mapsto x \end{cases} \quad \text{und} \quad g\colon \begin{cases} \mathbb{R}\setminus\{0\} \to H \\ x \mapsto \left(x, \frac{1}{x}\right) \end{cases};$$

eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ kann also homöomorph sein zu einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}$.



Angesichts dieser Beispiele könnte man sich fragen, ob ein Begriff, der so viele verschiedene Mengen miteinander identifiziert, überhaupt nützlich sein kann. Tatsächlich ist genau diese Vielfalt ein großer Vorteil der Topologie: Auf einem Würfel etwa können wir gut rechnen und damit viele Probleme recht einfach entscheiden. Andererseits gibt es aber kaum Probleme der „wirklichen“ Welt, die sich sinnvoll mit einem einfachen Würfel modellieren lassen. Es gibt aber gerade in der Ökonomie durchaus Ansätze, ein Wirtschaftssystem durch eine Teilmenge eines $\mathbb{R}^n$ zu modellieren, die zwar sehr viel komplizierter ist als ein Würfel, aber trotzdem homöomorph zu einem Würfel in einem geeigneten $\mathbb{R}^m$. Über den Homöomorphismus lassen sich dann Fragen wie die nach der Existenz eines Gleichgewichts zurückführen auf Fragen über einen Würfel, bei denen es erheblich größere Chancen gibt, eine Antwort zu finden.

Ein wesentlicher Teil der Vorlesung wird sich deshalb damit beschäftigen, kompliziertere Mengen und Abbildungen via Homöomorphie

zurückzuführen auf Polyeder und stückweise lineare Abbildungen zwischen ihnen. Insbesondere lassen sich so viele Probleme reduzieren auf Fragen aus der Linearen Algebra, und für deren Beantwortung steht uns ein weites Instrumentarium zur Verfügung.

Kapitel 2
Topologische Räume, Stetigkeit und Konvergenz

Wie wir im letzten Kapitel gesehen haben, kann eine offene Teilmenge eines $\mathbb{R}^n$ homöomorph sein zu einer abgeschlossenen Teilmenge eines $\mathbb{R}^m$; zwei Einbettungen einer Menge in einen $\mathbb{R}^n$ können also dort recht verschiedene Eigenschaften haben. Außerdem macht der umgebende $\mathbb{R}^n$ die Situation oft eher unübersichtlich: Wenn wir uns auf der Erdoberfläche bewegen, könnten wir zwar mit den kartesischen Koordinaten eines umgebenden $\mathbb{R}^3$ rechnen, aber natürlich bevorzugen wir zweidimensionale Koordinatensysteme wie Längen- und Breitengrade oder UTM-Koordinaten. Obwohl das Rechnen mit reellen Zahlen im weiteren Verlauf der Vorlesung eine große Rolle spielen wird, insbesondere auch bei den Anwendungen auf Gleichgewichte, definieren wir daher unseren Grundbegriff, den topologischen Raum, abstrakt und ohne Bezug zu einem $\mathbb{R}^n$.

Topologische Eigenschaften sind solche, die unter Homöomorphismen invariant bleiben; um diese definieren zu können, brauchen wir stetige Abbildungen. Stetige Abbildungen werden in der Analysis meist mit Hilfe von ε und δ definiert; da Abstände keine topologischen Eigenschaften sind, ist das für uns kein sinnvoller Zugang. Wir wissen aber aus der Analysis, daß eine Abbildung auch genau dann stetig ist, wenn das Urbild jeder offenen Menge wieder offen ist; es reicht also zur Definition von Stetigkeit, wenn wir offene Mengen haben.

Eine Teilmenge des $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt bekanntlich genau dann offen, wenn es zu jedem Punkt $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß jedes $y \in \mathbb{R}^n$ mit Abstand kleiner ε von x ebenfalls in U liegt. Damit ist klar, daß die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen wieder offen ist, genauso wie

zumindest der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen. (Der Durchschnitt unendlich vieler offener Mengen muß nicht mehr offen sein; beispielsweise ist der Durchschnitt der offenen Intervalle $\left(-\frac{1}{n},\ 1+\frac{1}{n}\right)$ das abgeschlossene Intervall $[0,\ 1]$.) Außerdem ist der gesamte $\mathbb{R}^n$ offen und natürlich auch die leere Menge. Diese Eigenschaften wollen wir zur Grundlage unserer Theorie machen:

Definition: *a)* Ein *topologischer Raum* X ist eine Menge X zusammen mit einer Menge $\mathcal{T}$ von Teilmengen von X, genannt die *Topologie* von X, für die gilt:

1.) $X \in \mathcal{T}$ und $\emptyset \in \mathcal{T}$

2.) Ist I eine beliebige Indexmenge und ist $U_i \in \mathcal{T}$ für alle $i \in I$, so liegt auch die Vereinigung $\bigcup\limits_{i\in I} U_i$ der U_i in $\mathcal{T}$.

3.) Sind für eine natürliche Zahl r die Mengen $U_1, \ldots, U_r$ Elemente von $\mathcal{T}$, so auch ihr Durchschnitt $\bigcap\limits_{i=1}^{r} U_i$.

b) Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen *offene Mengen.*

c) Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt *abgeschlossen*, wenn $X \setminus A$ offen ist.

d) Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen zwei topologischen Räumen X und Y heißt *stetig*, wenn für jede offene Teilmenge $U \subset Y$ auch die Urbildmenge $f^{-1}(U)$ offen in X ist.

e) Eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *Homöomorphismus,* wenn es eine stetige Abbildung $g\colon Y \to X$ gibt, so daß $f \circ g$ die Identität auf Y ist und $g \circ f$ die Identität auf X. (f und g sind dann natürlich bijektiv.)

f) Zwei topologische Räume heißen *homöomorph,* wenn es einen Homöomorphismus $f\colon X \to Y$ gibt.

Nach der Diskussion zu Beginn dieses Kapitels ist klar, daß der $\mathbb{R}^n$ ein topologischer Raum ist, wenn wir für $\mathcal{T}$ die Menge aller (im Sinne der Analysis) offener Teilmengen nehmen.

Wir können jede beliebige Menge zum topologischen Raum machen, indem wir als $\mathcal{T}$ einfach die kleinstmögliche Menge nehmen, nämlich $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. Diese Topologie bezeichnen wir als die *triviale* Topologie. Umgekehrt könnten wir für $\mathcal{T}$ auch die größtmögliche Teilmenge der Potenzmenge $\mathfrak{P}(X)$ nehmen, also $\mathfrak{P}(X)$ selbst; dann ist *jede* Teilmengen von X offen. In diesem Fall reden wir von der *diskreten* Topologie.

Schon diese Beispiele zeigen, daß wir eigentlich nicht die Menge X, sondern das Paar $(X, \mathcal{T})$ als topologischen Raum bezeichnen sollten, denn zumindest für den $\mathbb{R}^n$ kennen wir ja bereits jetzt drei verschiedene mögliche Topologien $\mathcal{T}$. Meist wird allerdings aus dem Zusammenhang klar sein, was $\mathcal{T}$ ist; im Falle des $\mathbb{R}^n$ beispielsweise werden wir zumindest in dieser Vorlesung immer davon ausgehen, daß er – wenn nicht explizit etwas anderes gesagt wird – seine „übliche“ Topologie trägt. Entsprechend werden wir, sofern keine Mißverständnisse zu befürchten sind, auch sonst meist kurz die Menge X als topologischen Raum bezeichnen.

Zum besseren Verständnis des Stetigkeitsbegriffs für allgemeine topologische Räume wollen wir aber doch kurz sehen, was passiert, wenn wir auf dem $\mathbb{R}^n$ verschiedene Topologien betrachten: X sei der $\mathbb{R}^n$ mit der diskreten Topologie, Y sei der $\mathbb{R}^n$ mit der üblichen Topologie und Z schließlich der $\mathbb{R}^n$ mit der trivialen Topologie. Als Abbildungen zwischen diesen Räumen betrachten wir nur die identische Abbildung. Dann sind die Abbildung $X \to Y$, $X \to Z$ und $Y \to Z$ stetig, denn das Urbild einer Menge ist ja gerade die Menge selbst, und wenn eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ offen ist bezüglich der trivialen Topologie, ist sie erst recht offen bezüglich der üblichen Topologie, und bezüglich der diskreten Topologie ist ohnehin *jede* Menge offen. Von den Abbildungen $Z \to Y, Z \to X$ und $Y \to X$ ist aber keine stetig, denn im Zielraum gibt es jeweils offene Mengen, die im Urbildraum nicht offen sind.

Wenn wir zeigen wollen, daß eine Abbildung $f\colon X \to Y$ stetig ist, müssen wir nach obiger Definition nachweisen, daß das Urbild *jeder* offenen Menge aus Y offen in X ist. Im Falle $Y = \mathbb{R}^n$ etwa gibt es (bezüglich der üblichen Topologie) sehr viele offene Mengen, über deren allgemeine Struktur wir nur wenig sagen können. Für alle praktischen Zwecke ist für Abbildungen $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ die aus der Analysis gewohnte ε-δ-Definition viel einfacher nachzuprüfen als die Offenheit der Urbilder offener Mengen.

Um auch für beliebige topologische Räume die Stetigkeit einer Abbildung lokal formulieren zu können, führen wir den Begriff der Umgebung ein:

Definition: X sei ein topologischer Raum. Eine *offene Umgebung* U eines Punktes $x \in X$ ist eine offene Menge, die x enthält. Eine *Umgebung* V von x ist eine Teilmenge $V \subseteq X$, die eine offene Umgebung von x enthält.

Lemma: Das System aller Umgebungen erfüllt die folgenden HAUSDORFFschen Umgebungsaxiome:
a) Ist U eine Umgebung von x, so liegt x in U. Der gesamte Raum X ist Umgebung aller Punkte $x \in X$.
b) Eine Teilmenge $V \subseteq X$, die eine Umgebung U von x enthält, ist selbst eine Umgebung von x.
c) Der Durchschnitt endlich vieler Umgebungen von X ist selbst eine Umgebung von x.
d) Jede Umgebung V von x enthält eine Umgebung U von x, die gleichzeitig Umgebung eines jeden Punkts $y \in U$ ist.

Beweis: a) und *b)* folgen sofort aus der Definition. Sind $V_1, \ldots, V_r$ Umgebungen von x, so gibt es nach Definition offene Umgebungen $U_1 \subseteq V_1, \ldots, U_r \subseteq V_r$ von x; der Durchschnitt $\bigcap_{i=1}^{r} U_i$ ist offen und enthält x, ist also eine offene Umgebung von x. Da dieser Durchschnitt im Durchschnitt der V_i liegt, ist damit auch *c)* bewiesen. Für *d)* schließlich müssen wir für U einfach eine in V enthaltene offene Umgebung von x nehmen; diese ist nach Definition Umgebung aller ihrer Punkte. ∎

FELIX HAUSDORFF (1868–1942) wurde in Breslau als Sohn eines jüdischen Kaufmanns geboren. Zwei Jahre später übersiedelte die Familie nach Leipzig, wo er auch Mathematik studierte und mit Arbeiten über Anwendungen auf die Astronomie sowohl 1891 promovierte als auch 1895 habilitierte. Erst ab 1904 beschäftigte er sich mit Mengenlehre und der Topologie, wofür er heute vor allem bekannt ist. 1910–1913 lehrte er in Bonn, wohin er nach einer Professur in Greifswald 1921 auch wieder zurückkehrte. 1935 mußte er auf Grund der nationalsozialistischen Gesetze seine Stelle aufgeben, beschäftigte sich aber weiterhin mit Topologie. Bevor er 1942 interniert und nach Polen deportiert werden sollte, begingen er, seine Frau und deren Schwester Selbstmord.

Umgekehrt lassen sich topologische Räume auch charakterisieren durch diese Umgebungsaxiome: Ist für jedes Element $x \in X$ eine Menge $\mathfrak{U}_x$ von Teilmengen gegeben, die wir als Umgebungen von x bezeichnen, so definieren wir eine Menge $U \subseteq X$ als offen, wenn sie mit jedem Punkt $x \in U$ auch eine der Mengen aus $\mathfrak{U}_x$ enthält. Falls die HAUSDORFFschen Umgebungsaxiome gelten, erfüllen die so definierten offenen Mengen offenbar alle drei Eigenschaften aus der Definition eines topologischen Raums.

Zur lokalen Charakterisierung der Stetigkeit definieren wir:

Definition: Eine Abbildung $f: X \to Y$ zwischen zwei topologischen Räumen heißt *stetig im Punkt* $x \in X$, falls es zu jeder Umgebung V von $f(x)$ eine Umgebung U von x gibt, für die $f(U) \subseteq V$ ist.

Lemma: Eine Abbildung $f: X \to Y$ zwischen zwei topologischen Räumen ist genau dann stetig, wenn sie in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.

Beweis: Sei zunächst f stetig, $x \in X$ und V eine Umgebung von $f(x)$. Dann enthält V eine offene Umgebung V' von $f(x)$, und wegen der Stetigkeit von f ist deren Urbild $U = f^{-1}(V')$ eine offene Umgebung von x. Da $f(U) \subseteq V' \subseteq V$ ist, folgt die Stetigkeit von f in x.

Sei umgekehrt f stetig in jedem Punkt $x \in X$ und $V \subset Y$ offen. Da V Umgebung jedes seiner Punkte ist, hat jeder Punkt $x \in U = f^{-1}(V)$ eine Umgebung, deren Bild in V liegt und damit erst recht eine offene Umgebung $U_x \subseteq U$. Als Vereinigung aller dieser offener Mengen U_x ist auch U offen, womit die Stetigkeit von f bewiesen ist. ∎

Um interessantere Beispiele topologischer Räume zu bekommen, wollen wir als nächstes beliebige Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ oder allgemeiner noch von *irgendeinem* topologischen Raum zu topologischen Räumen machen:

Definition: X sei ein topologischer Raum und $Z \subseteq X$ sei eine Teilmenge von X. Eine Menge $U \subseteq Z$ heißt *offen bezüglich der Spurtopologie auf Z bezüglich X*, wenn es eine offene Teilmenge $V \subseteq X$ gibt, so daß $U = V \cap Z$ ist.

Bevor wir mit dieser Definition arbeiten, sollten wir zunächst überprüfen, daß Z durch diese Definition zu einem topologischen Raum wird, daß die Spurtopologie also wirklich eine Topologie ist.

Der gesamte Raum $Z = X \cap Z$ und die leere Menge $\emptyset = \emptyset \cap Z$ sind offen in der Spurtopologie. Sind $U_i, i \in I$ irgendwelche dort offene Mengen, so gibt es in X offene Mengen V_i mit $U_i = V_i \cap X$ und

$$\bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{i\in I}(V_i \cap Z) = \left(\bigcup_{i\in I} V_i\right) \cap Z$$

ist offen. Entsprechend ist für endlich viele offene Mengen $U_i = V_i \cap Z$

$$\bigcap_{i=1}^{r} U_i = \bigcap_{i=1}^{r}(V_i \cap Z) = \bigcap_{i=1}^{r} V_i \cap Z$$

eine offene Menge.

Man beachte, daß offene Mengen $U \subseteq Z$ bezüglich der Spurtopologie als Teilmengen von X im allgemeinen *nicht* offen sind: So ist beispielsweise Z selbstverständlich offen bezüglich der Spurtopologie, selbst wenn Z keine offene Teilmenge von X ist.

Betrachten wir etwa als Beispiel noch einmal die Abbildung

$$f\colon \begin{cases} [0,\, 2\pi) \to \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1\right\} \\ \qquad t \mapsto (\cos t, \sin t) \end{cases}$$

aus dem letzten Kapitel, jetzt aber bezüglich der Spurtopologien.

Im halboffenen Intervall $X = [0,\, 2\pi)$ sind dann insbesondere auch alle Teilintervalle $[0,\, a)$ mit $a \leq 2\pi$ offen, denn wir können sie ja schreiben als $[0,\, a) = (-1,\, a) \cap X$. Für $a < 2\pi$ ist ihr Urbild unter der Umkehrabbildung von f, also ihr Bild unter f, gleich der Menge aller Punkte (x, y) aus $\mathbb{R}^2$, für die es ein $t \in [0,\, a)$ gibt, so daß $x = \cos t$ und $y = \sin t$ ist. Insbesondere liegt also der Punkt $(1, 0) = (\cos 0, \sin 0)$ dort. Wäre die Menge offen, so gäbe es eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^2$, so daß sie der Durchschnitt der Kreislinie mit U wäre. Insbesondere müßte U eine ε-Umgebung von $(1, 0)$ enthalten, und deren Schnitt mit der Kreislinie enthält auch die Punkte $\big(\cos(2\pi - \delta), \sin(2\pi - \delta)\big) = \big(\cos\delta, -\sin\delta\big)$

mit $0 \leq \delta < \arcsin \varepsilon$. Zumindest für $\delta < 2\pi - a$ liegen diese aber nicht in der Menge. Somit ist die Umkehrabbildung nicht stetig und f kein Homöomorphismus.

Die Stetigkeit von f dagegen läßt sich leicht mit dem lokalen Kriterium beweisen: Ist $t_0 \in (0, 1)$ und ist U irgendeine Umgebung des Punkts $f(t_0) = (\cos t_0, \sin t_0)$, so enthält U insbesondere eine Teilmenge bestehend aus allen Punkten der Form $(\cos t, \sin t)$ mit $t_1 < t < t_2$; außerdem ist $0 < t_1 < t_0 < t_2 < 2\pi$. Somit wird das Intervall (t_1, t_2) von f nach U abgebildet.

Bleibt noch der Punkt $t_0 = 0$ zu betrachten. Jede Umgebung U seines Bilds $(1, 0)$ enthält eine Teilmenge bestehend aus allen Punkten $(\cos t, \sin t)$ mit $0 \leq t < t_1$ oder $t_2 < t < 2\pi$ für geeignete reelle Zahlen $0 < t_1 < t_2 < 2\pi$. Die Menge $[0, t_1) \cup (t_2, 2\pi)$ wird von f auf diese Teilmenge und somit nach U abgebildet und ist, als Vereinigung zweier in der Spurtopologie offener Teilmengen von X selbst offen in X. Damit ist die Stetigkeit von f bewiesen.

Aus der Analysis sind wir es gewohnt, die Stetigkeit einer Funktion auch oft durch die Vertauschbarkeit von f mit Grenzwerten von Folgen nachzuprüfen. Da die Konvergenz einer der wesentlichen Grundbegriffe der Analysis ist, der unter anderem sowohl bei der Definition des Differentialquotienten als auch bei der des bestimmten Integrals eine wichtige Rolle spielt, sollten wir auch für allgemeine topologische Räume erklären, was konvergente Folgen sind. Wir ersetzen dazu einfach in der aus der Analysis bekannten Definition die ε-Umgebungen durch beliebige offene Umgebungen:

Definition: Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Punkten x_n eines topologischen Raums X konvergiert gegen den Punkt $x \in X$, wenn es zu jeder offenen Umgebung U von x ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $x_n \in U$ für alle $n \geq N$.

Für Folgen reeller Zahlen ist das äquivalent zur klassischen Definition, bei exotischen Topologien kann sie aber auf den ersten Blick unerwartete Konsequenzen haben: Versehen wir etwa eine Menge X mit der trivialen Topologie, betrachten also nur die leere Menge und X selbst als offen, so ist X für jeden seiner Punkte $x \in X$ die einzige offene Umgebung,

und somit konvergiert jede Folge von Elementen aus X gegen jedes Element $x \in X$.

Etwas komplizierter ist das folgende Beispiel: Wir betrachten die Menge $X = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cup \{a, b\}$ mit zwei abstrakten Punkten a und b. Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ soll genau dann offen sein, wenn sie auch als Teilmenge von $\mathbb{R}$ offen ist. Eine Teilmenge $U \subseteq X$, die a und/oder b enthält, können wir schreiben als $U = V \cup W$ mit $V \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $W \subseteq \{a, b\}$; sie soll genau dann offen sein, wenn $V \cup \{0\} \subseteq \mathbb{R}$ offen ist. Man überlegt sich leicht, daß auf dieser sogenannten *Knüppelgeraden* die Folge der Zahlen $1/n$ sowohl gegen a als auch gegen b konvergiert.

Wenn wir solche Phänomene vermeiden wollen, müssen wir von unserem topologischen Raum X mehr fordern als nur die üblichen Axiome; die notwendige Zusatzbedingung geht zurück auf FELIX HAUSDORFF:

Definition: Ein topologischer Raum X heißt HAUSDORFFsch oder HAUSDORFF-Raum, wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ offene Umgebungen U von x und V von y gibt, so daß $U \cap V = \emptyset$ ist.

Offensichtlich ist jeder $\mathbb{R}^n$ sowie jede Teilmenge eines $\mathbb{R}^n$ HAUSDORFFsch, denn dort können wir vom Abstand d der beiden Punkte x und y reden; nehmen wir als U und V die ε-Umgebungen mit $\varepsilon = \frac{d}{3}$, so haben wir zwei disjunkte Umgebungen.

Allgemeiner gilt auch:

Lemma: Jede Teilmenge eines HAUSDORFF-Raums ist (bezüglich der Spurtopologie) selbst HAUSDORFFsch.

Beweis: X sei ein HAUSDORFF-Raum und $Z \subset X$. Zu $x \neq y$ aus Z gibt es in X offene Umgebungen U von x und V von y mit $U \cap V = \emptyset$. Offensichtlich sind dann $U \cap Z$ und $V \cap Z$ zwei bezüglich der Spurtopologie offene disjunkte Umgebungen in Z.

■

Uns interessiert hier besonders die folgende Aussage:

Lemma: In einem HAUSDORFF-Raum hat jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ höchstens einen Grenzwert.

Beweis: Angenommen, x und y wären zwei verschiedene Grenzwerte der Folge. Nach Definition eines HAUSDORFF-Raums gäbe es dazu disjunkte Umgebungen U von x und V von y, und nach Definition der Konvergenz müßte es Indizes $N, M \in \mathbb{N}$ geben, so daß $x_n \in U$ für alle $n \geq N$ und $x_n \in V$ für alle $n \geq M$. Das ist aber offensichtlich unmöglich, denn $U \cap V = \emptyset$.

■

In der Analysis können wir die Stetigkeit von Funktionen mit Hilfe konvergenter Folgen definieren; nachdem wir gesehen haben, daß Konvergenz in beliebigen topologischen Räumen etwas ganz anderes bedeuten kann als das, was wir aus der Analysis gewohnt sind, wollen wir der entsprechenden Eigenschaft vorsichtshalber einen anderen Namen geben:

Definition: Eine Abbildung $f: X \to Y$ zwischen zwei topologischen Räumen heißt *folgenstetig,* wenn für jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Punkten aus X mit Grenzwert $x \in X$ auch die Folge der Bildpunkte $f(x_n)$ gegen $f(x)$ konvergiert.

Lemma: Jede stetige Funktion $f: X \to Y$ zwischen zwei topologischen Räumen ist folgenstetig.

Beweis: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere in X gegen den Punkt x und U sei eine offene Umgebung von $f(x)$. Wegen der Stetigkeit von f ist dann $f^{-1}(U)$ eine offene Umgebung von x, und wegen der Konvergenz der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $x_n \in f^{-1}(U)$ für alle $n \geq N$. Damit ist auch $f(x_n) \in U$ für alle $n \geq N$, und die Konvergenz der Folge der $f(x_n)$ gegen $f(x)$ ist bewiesen.

■

Für reelle Funktionen, egal ob in einer oder in mehreren Veränderlichen, gilt bekanntlich auch die Umkehrung dieses Lemmas. Beim Beweis spielen dort aber ε-Umgebungen mit $\varepsilon = \frac{1}{n}$ eine wesentliche Rolle, und dafür haben wir in der allgemeinen Situation kein Analogon. So verwundert es kaum, daß wir auch hier noch zusätzliche Forderungen an den topologischen Raum stellen müssen. (Man kann explizite Gegenbeispiele konstruieren von Funktionen, die folgenstetig, aber nicht stetig sind; da

dies aber mit unseren derzeitigen Kenntnissen etwas langwierig wäre, sei hier darauf verzichtet.)

Definition: *a)* Eine Menge $\mathfrak{U}$ von Umgebungen eines Punktes x heißt *Umgebungsbasis* von x, wenn jede Umgebung von x eine Umgebung aus $\mathfrak{U}$ enthält.
b) Ein topologischer Raum X erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom und heißt *1-abzählbar,* wenn jeder Punkt $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis hat.

Beispiele 1-abzählbarer Räume sind die Räume $\mathbb{R}^n$ oder allgemeiner metrische Räume, wo die ε-Umgebungen mit $\varepsilon = \frac{1}{n}$ eine solche Basis bilden; typische Gegenbeispiele sind Funktionenräume wie die Menge *aller* Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. In dieser Vorlesung werden wir uns mit solchen Räumen nicht beschäftigen.

Angenommen, die offenen Umgebungen $V_1, V_2, \ldots$ bilden eine abzählbare Umgebungsbasis des Punktes $x \in X$. Dann gilt dasselbe für die Durchschnitte

$$W_1 = V_1, \quad W_2 = V_1 \cap V_2, \quad W_3 = V_1 \cap V_2 \cap V_3, \quad \ldots,$$

und offensichtlich ist $W_1 \supseteq W_2 \supseteq W_3 \supseteq \cdots$. Somit hat in einem 1-abzählbaren topologischen Raum jeder Punkt auch eine abzählbare Umgebungsbasis, deren Elemente immer kleiner werden. Eine solche Umgebungsbasis kann in Beweisen oft die ε-Umgebungen mit $\varepsilon = \frac{1}{n}$ ersetzen, beispielsweise im folgenden:

Lemma: Ist X ein 1-abzählbarer und Y ein beliebiger topologischer Raum, so ist jede folgenstetige Abbildung $f\colon X \to Y$ stetig.

Beweis: $x \in X$ sei ein beliebiger Punkt und $U \subseteq Y$ eine Umgebung von $f(x)$. Wir müssen zeigen, daß es eine Umgebung V von x gibt, so daß $f(V) \subseteq U$ ist.

Angenommen, es gibt keine solche Umgebung V. Auch für eine abzählbare Umgebungsbasis $\{V_1, V_2, \ldots\}$ von x aus immer kleiner werdenden offenen Umgebungen liegt dann das Bild keiner dieser Mengen in U. Wir können daher Elemente $x_n \in V_n$ finden derart, daß $f(x_n)$

nicht in U liegt. Da die V_n eine Umgebungsbasis bilden, konvergiert die Folge der x_n gegen x; wegen der Folgenstetigkeit konvergiert also die Folge der $f(x_n)$ gegen $f(x)$. Das ist aber unmöglich, denn kein einziges der Folgenglieder liegt in der offenen Umgebung U von $f(x)$. ∎

Das letzte Argument dieses Beweises hätten wir auch anders formulieren können: Die Punkte $f(x_n)$ liegen allesamt in der abgeschlossenen Menge $Y \setminus U$, und deshalb muß auch ihr Grenzwert dort liegen nach dem folgenden

Lemma: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine konvergente Folge von Elementen der abgeschlossenen Teilmenge Z des topologischen Raums X. Konvergiert die Folge gegen $x \in X$, so muß x in Z liegen.

Beweis: Läge x im Komplement $U = X \setminus Z$ von Z, so müßte es wegen der Konvergenz der Folge ein $N \in \mathbb{N}$ geben, so daß auch alle x_n mit $n \geq N$ in dieser offenen Umgebung von x lägen. Tatsächlich liegt dort aber kein einziges dieser Elemente. ∎

Für 1-abzählbare topologische Räume läßt sich dieses Lemma auch umkehren zu einer Charakterisierung abgeschlossener Mengen:

Definition: Ein Punkte $x \in X$ heißt *Randpunkt* der Teilmenge $Z \subseteq X$ des topologischen Raums X, wenn jede Umgebung von x sowohl Punkte aus Z als auch Punkte aus $X \setminus Z$ enthält.

Lemma: *a)* Eine Teilmenge $Z \subseteq X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn sie jeden ihrer Randpunkte enthält.
b) In einem 1-abzählbaren topologischen Raum ist eine Teilmenge $Z \subseteq X$ genau dann abgeschlossen, wenn für jede gegen ein $z \in X$ konvergente Folge von Elementen $z_n \in Z$ der Grenzwert z in Z liegt.

Beweis: a) Ist $Z \subseteq X$ abgeschlossen und $x \in X$ ein Randpunkt von Z, der nicht in Z liegt, so liegt x im offenen Komplement von Z, hat also dort eine offene Umgebung U. In dieser kann aber kein Punkt aus Z liegen. Liegt umgekehrt jeder Randpunkt von Z in Z, so kann kein Punkt aus dem Komplement von Z Randpunkt sein. Somit hat jeder solche

Punkt eine offene Umgebung, die keinen Punkt aus Z enthält. Damit ist das Komplement von Z als Vereinigung dieser offenen Umgebungen offen, Z selbst also abgeschlossen.

b) Ist Z abgeschlossen, so konvergiert nach dem vorigen Lemma jede in X konvergente Folge von Elementen aus Z gegen ein Element aus Z. Umgekehrt habe Z diese Eigenschaft, und x sei ein Randpunkt von Z. Wir betrachten eine abzählbare Umgebungsbasis von x bestehend aus ineinander liegenden offenen Mengen $U_1 \supset U_2 \supset \cdots$. In jedem dieser U_i liegen Punkte aus Z; wir wählen jeweils ein solches Element $z_n \in U_n \cap Z$. Da die U_n eine Umgebungsbasis bilden, konvergiert die Folge der z_n gegen x, also liegt x in Z. Somit enthält Z alle seine Randpunkte, ist also nach *a)* abgeschlossen.

■

Wenn es ein erstes Abzählbarkeitsaxiom gibt, sollte es auch ein zweites geben; wir werden es zwar selten brauchen, aber es sei der Vollständigkeit halber erwähnt:

Definition: *a)* Eine Menge $\mathfrak{B}$ von offenen Teilmengen eines topologischen Raums X heißt *Basis der Topologie von* x, wenn sich jede offene Menge als Vereinigung von Mengen aus $\mathfrak{B}$ darstellen läßt.
b) Ein topologischer Raum X erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom und heißt *2-abzählbar,* wenn seine Topologie eine abzählbare Basis hat.

Beispielsweise ist der $\mathbb{R}^n$ 2-abzählbar, denn die offenen Mengen

$$\left\{ y \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; \|y - x\| < \frac{1}{m} \right\} \quad \text{mit} \quad x \in \mathbb{Q}^n, \;\; m \in \mathbb{N}$$

bilden (unabhängig davon, welche Norm wir nehmen) eine abzählbare Basis seiner Topologie.

Offensichtlich ist das System der offenen Mengen eines topologischen Raums durch eine Basis der Topologie eindeutig bestimmt: Eine Menge ist genau dann offen, wenn sie sich als Vereinigung von Basismengen schreiben läßt. Dies können wir dazu verwenden, um auf einfache Weise das Produkt zweier topologischer Räume zu einem topologischen Raum zu machen:

Definition: X und Y seien topologische Räume. Die *Produkttopologie* auf $X \times Y$ ist jene Topologie, die die Mengen der Form $U \times V$ mit offenen Teilmengen $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$ als Basis hat.

Lemma: Ein topologischer Raum X ist genau dann HAUSDORFFsch, wenn die Diagonale

$$\Delta = \big\{(x, y) \in X \times X \;\big|\; x = y\big\}$$

bezüglich der Produkttopologie abgeschlossen in $X \times X$ ist.

Beweis: Δ ist genau dann abgeschlossen, wenn das Komplement

$$U = X \times X \setminus \Delta = \big\{(x, y) \in X \times X \;\big|\; x \neq y\big\}$$

offen ist. In diesem Fall hat jeder Punkt (x, y) mit $x \neq y$ eine ganz in U liegende offene Umgebung V, und diese wiederum enthält eine Basisumgebung der Form $U_1 \times U_2$, wobei U_1 eine Umgebung von x und U_2 eine von y ist X ist. Da $U_1 \times U_2 \subseteq U$, ist $U_1 \cap U($$_2$$= \emptyset$; der Raum X ist also HAUSDORFFsch.

Ist umgekehrt X HAUSDORFFsch, so gibt es zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X$ offene Umgebungen U_1, U_2 mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, d.h. $U_1 \times U_2 \subseteq U$. Somit ist U offen, also Δ abgeschlossen.

■

Kapitel 3
Zusammenhängende und kompakte Mengen

Den Begriff des Zusammenhangs können wir für allgemeine topologische Räume genauso definieren wie für Teilmengen eines $\mathbb{R}^n$:

Definition: *a)* Ein topologischer Raum X heißt zusammenhängend, wenn es keine zwei nichtleere, von X verschiedenen offene Teilmengen $U, V \subset X$ gibt mit $U \cap V = \emptyset$ und $U \cup V = X$.
b) Ein topologischer Raum X heißt *wegzusammenhängend,* wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ eine stetige Abbildung $f\colon I \to X$ aus dem Einheitsintervall $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ gibt, so daß $f(0) = x$ und $f(1) = y$ ist.
c) Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ heißt zusammenhängend *bzw.* wegzusammenhängend, wenn sie als topologischer Raum bezüglich der Spurtopologie diese Eigenschaft hat.

Für zusammenhängende Mengen läßt sich *c)* auch äquivalent so formulieren, daß $Y \subseteq X$ genau dann zusammenhängend ist, wenn gilt: Sind U, V zwei offene Teilmengen von X mit leerem Durchschnitt $U \cap V \cap Y$, und liegt Y in $U \cup V$, so muß Y bereits in einer der beiden offenen Mengen liegen.

Lemma: Jeder wegzusammenhängende topologische Raum X ist zusammenhängend.

Beweis: U und V seien zwei offene Mengen und $X = U \cup V$. Falls $X = \emptyset$, folgt $X = U = V = \emptyset$, und wir sind fertig. Andernfalls gibt es mindestens einen Punkt $x \in X$. Dieser muß entweder in U oder in V liegen; indem wir gegebenenfalls die Bezeichnungen vertauschen, können wir annehmen, daß er in U liegt. Wir müssen zeigen, daß dann auch alle anderen Punkte $y \in X$ in U liegen.

Nach Voraussetzung gibt es eine Kurve γ, die x und y miteinander verbindet. Wir wollen uns überlegen, daß diese ganz in U liegen muß. Dazu betrachten wir

$$s = \sup\{u \in [0,1] \mid \gamma(t) \in U \text{ für alle } t \in [0,u)\}\,.$$

Falls $s < 1$ wäre, könnte $\gamma(s)$ nicht in U liegen, denn wegen der Stetigkeit von γ ist $\gamma^{-1}(U)$ eine offene Menge, enthält also zu jedem ihrer Punkte auch eine offene Umgebung. s könnte aber auch nicht in V liegen, denn auch $\gamma^{-1}(V)$ ist offen, und für alle $0 \leq t < s$ liegt t in $\gamma^{-1}(U)$, also, da $U \cap V = \emptyset$, nicht in $\gamma^{-1}(V)$. Das ist ein Widerspruch, denn $X \subseteq U \cup V$, so daß $\gamma(s)$ in einer der beiden Mengen liegen muß.

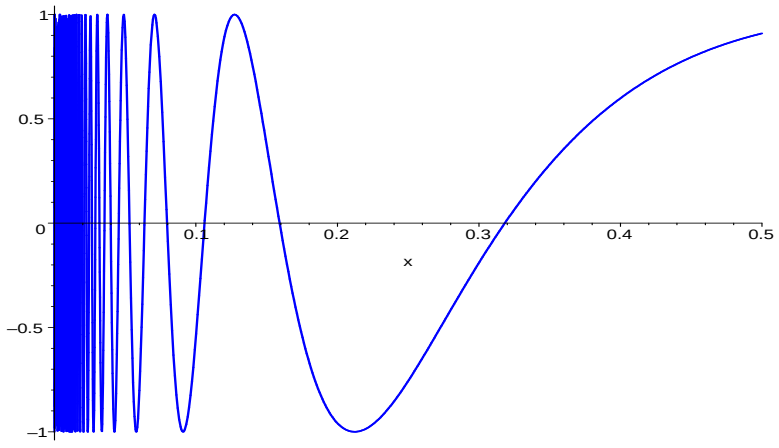
Somit ist $s = 1$ und $y = \gamma(1) \in U$, denn läge $\gamma(1)$ in V, gäbe es auch eine Umgebung der Eins, so daß $\gamma(t)$ für alle t aus dieser Umgebung in V läge. Da y ein beliebiger Punkt aus X war, liegt ganz X in U und ist daher zusammenhängend.

■

Die Umkehrung dieses Lemmas gilt nicht; ein populäres Gegenbeispiel ist der Raum

$$X = \left\{(x, \sin\tfrac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\right\} \cup \left\{(0,y) \mid |y| \leq 1\right\}$$

bestehend aus einer Sinuslinie mit für $x \to 0$ immer kleiner werdendem Abstand zwischen aufeinanderfolgenden Bergen und Tälern sowie dem Intervall $[-1,\ 1]$ auf der y-Achse, dem sich diese Sinuslinie immer mehr annähert.



Diese Menge ist nicht wegzusammenhängend; beispielsweise lassen sich die beiden Punkte $\left(\frac{1}{\pi}, 0\right)$ und $(0,1)$ aus X nicht durch eine Kurve

miteinander verbinden: Gäbe es nämlich eine Kurve γ mit $\gamma(0) = (\frac{1}{\pi}, 0)$ und $\gamma(1) = (0, 1)$, so könnten wir die Menge aller $u \in [0,\ 1]$ betrachten, für die $\gamma(t)$ im Intervall $0 \leq t < u$ überall positive x-Koordinate hat; ihr Supremum sei s. Wegen $\gamma(1) = (0, 1)$ wäre $s < 1$; außerdem müßte die x-Koordinate von $\gamma(s)$ verschwinden, denn wäre sie positiv, könnte es nicht in jeder beliebig kleinen Umgebung von $\gamma(s)$ Punkte mit x-Koordinate Null geben. Da $\sin \frac{1}{x}$ in jedem Intervall $(0,\ \varepsilon)$ alle Werte zwischen -1 und 1 annimmt, müßte $\gamma(s)$ wegen der Stetigkeit von γ in jeder beliebig kleinen Umgebung Punkte mit allen y-Koordinaten zwischen -1 und 1 haben, was natürlich nicht möglich ist. Somit ist X nicht wegzusammenhängend.

Die beiden Teilmengen

$$X_1 = \left\{(x, \sin \tfrac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x > 0\right\} \quad \text{und} \quad X_2 = \left\{(0, y) \;\middle|\; |y| \leq 1\right\}$$

sind natürlich wegzusammenhängend und damit erst recht zusammenhängend. Wenn es zwei offene Mengen U, V mit leerem Durchschnitt gäbe, so daß $X \subseteq U \cup V$ weder in U noch in V liegt, müßte daher X_1 in U und X_2 in V liegen oder umgekehrt. Das ist aber nicht möglich, denn in jeder offenen Menge, die X_2 enthält, gibt es auch Punkte aus X_1. Daher ist X zusammenhängend.

Lemma: Ist X ein zusammenhängender topologischer Raum und ist $Z \subseteq X$ sowohl offen als auch abgeschlossen, so ist $Z = \emptyset$ oder $Z = X$.

Beweis: Ist Z sowohl offen als auch abgeschlossen, so gilt das gleiche auch für sein Komplement $X \setminus Z$, und X ist die Vereinigung dieser beiden disjunkten offenen Mengen. Da X zusammenhängend ist, muß somit eine der beiden leer sein und die andere gleich X.

■

Lemma: Für eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}$ sind die folgenden vier Aussagen äquivalent:
a) X ist ein Intervall.
b) X ist konvex.
c) X ist wegzusammenhängend.
d) X ist zusammenhängend.

Beweis: Die Folgerungen *a*) $\Rightarrow$ *b*) $\Rightarrow$ *c*) $\Rightarrow$ *d*) sind offensichtlich *bzw.* wurden (im letzten Fall) gerade allgemein gezeigt; wirklich beweisen müssen wir daher nur, daß jede zusammenhängende Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist. Da wir die leere Menge *per definitionem* als Intervall betrachten, können wir dazu annehmen, daß X nicht leer ist.

Falls X nach oben beschränkt ist, hat X ein Supremum $b \in \mathbb{R}$; wir wollen uns als erstes überlegen, daß X dann für jedes $z \in X$ das Intervall $[z, b)$ enthält: Gäbe es nämlich ein $c \in [z, b)$, das nicht in X läge, so wäre X die Vereinigung der beiden disjunkten nichtleeren offenen Mengen $U = \{x \in X \mid x < c\}$ und $V = \{x \in X \mid x > c\}$, also nicht zusammenhängend. Entsprechend folgt, daß X, sofern es unbeschränkt ist, zu jedem $z \in X$ auch alle reellen Zahlen $x \geq z$ enthalten muß, denn läge $x > z$ nicht in X, könnten wir wie eben argumentieren.

Dasselbe Argument zeigt auch, daß X, falls es nach unten beschränkt ist, für jedes $z \in X$ das Intervall $(a, z]$ enthalten muß, wobei a das Infimum von X bezeichnet; falls X nicht nach unten beschränkt ist, muß es entsprechend zu jedem $z \in X$ auch alle reellen Zahlen $x \leq z$ enthalten.

Ist also X eine beschränkte zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}$ mit Infimum a und Supremum b, so enthält X das offene Intervall (a, b). Da X keine Punkte $z < a$ oder $z > b$ enthalten kann, können dazu höchstens noch einer oder beide der Punkte a, b kommen; X ist also eines der vier Intervalle (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$ oder $(a, b]$.

Falls X nur nach unten beschränkt ist mit Infimum a, enthält X auf jeden Fall alle reellen Zahlen $x > a$, zusätzlich eventuell nach den Punkt a. Entsprechendes gilt für eine nur nach oben beschränkte Menge.

Bleibt noch der Fall, daß X weder nach oben noch nach unten beschränkt ist; dann ist $X = \mathbb{R}$, was wir ebenfalls als Intervall betrachten. ∎

Die für uns wichtigste Anwendung zusammenhängender Mengen ist die folgende Verallgemeinerung des Zwischenwertsatzes:

Satz: Ist $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung und ist X zusammenhängend, so ist auch $f(X)$ zusammenhängend.

Beweis: U und V seien zwei disjunkte offene Teilmengen von Y, und $f(X)$ liege in der Vereinigung $U \cup V$. Wegen der Stetigkeit von f sind die Urbilder $f^{-1}(U)$ und $f^{-1}(V)$ offene Teilmengen von X, die natürlich ebenfalls disjunkt sind, deren Vereinigung aber gleich X ist. Somit muß X gleich einer dieser beiden Mengen $f^{-1}(U)$ oder $f^{-1}(V)$ sein, also $f(X)$ ganz in U oder in V liegen.

■

Speziell für $Y = \mathbb{R}$ folgt

Korollar: Ist $f: X \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung eines zusammenhängenden topologischen Raums X nach $\mathbb{R}$, so ist $f(X)$ ein Intervall.

■

Bei der Kompaktheit ist die Situation etwas komplizierter: In manchen Lehrbüchern der Analysis werden kompakte Mengen definiert als abgeschlossene und beschränkte Teilmengen eines $\mathbb{R}^n$. Damit können wir nichts anfangen, denn in allgemeinen topologischen Räumen können wir nicht von Beschränktheit reden. Die alternative Definition, wonach eine Teilmenge kompakt ist, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung hat, könnten wir übernehmen; da wir im Zusammenhang mit Kompaktheit aber vor allem Aussagen über Konvergenz beweisen wollen, empfiehlt es sich, noch zusätzlich die (für Teilmengen eines $\mathbb{R}^n$ selbstverständliche) HAUSDORFF-Eigenschaft zu fordern. Wir definieren daher:

Definition: X sei ein topologischer Raum
a) Ein System $\mathfrak{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ von offenen Teilmengen $U_i \subseteq X$ mit i aus einer beliebigen Indexmenge I heißt *offene Überdeckung* von X, wenn $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ die Vereinigungsmenge aller U_i ist.
b) Ist $J \subseteq I$ eine Teilmenge von I und ist X bereits die Vereinigung aller U_i mit $i \in J$, bezeichnen wir $\mathfrak{V} = \{U_i \mid i \in J\}$ als eine *Teilüberdeckung* von $\mathfrak{U}$. Ist speziell J eine endliche Menge, so sprechen wir von einer *endlichen Teilüberdeckung.*
c) X heißt *quasikompakt,* wenn jede offene Überdeckung $\mathfrak{U}$ von X eine endliche Teilüberdeckung hat.
d) Ein quasikompakter topologischer Raum X heißt *kompakt,* wenn er HAUSDORFFsch ist.

e) Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ eines topologischen Raums heißt quasikompakt *bzw.* kompakt, wenn sie bezüglich der Spurtopologie diese Eigenschaft hat.

Letzteres können wir wieder wie beim Zusammenhang auch unabhängig vom Begriff der Spurtopologie formulieren: $Y \subseteq X$ ist quasikompakt genau dann, wenn es für jedes System von (in X) offenen Mengen U_i mit $Y \subseteq \cup_{i\in I} U_i$ eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ gibt, so daß Y bereits in der Vereinigung der endlich vielen U_i mit $i \in J$ liegt. Wir reden auch in dieser Situation von einer offenen Überdeckung von Y und einer endlichen Teilüberdeckung.

Für Teilmengen eines $\mathbb{R}^n$ (oder allgemeiner eines HAUSDORFF-Raums) gibt es keinen Unterschied zwischen Quasikompaktheit und Kompaktheit; insbesondere haben wir im $\mathbb{R}^n$ genau die aus der Analysis bekannten kompakten Mengen.

Lemma: Jede abgeschlossene Teilmenge $Z \subset X$ eines kompakten topologischen Raums X ist kompakt.

Beweis: Da X HAUSDORFFsch ist, gilt das gleiche für Z. Weiter sei $\mathfrak{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ eine offene Überdeckung von Z. Die U_i sind offen bezüglich der Spurtopologie; es gibt also offene Mengen $V_i \subseteq X$, so daß $U_i = V_i \cap Z$ ist. Wegen der Abgeschlossenheit von Z ist auch $V = X \setminus Z$ offen; nehmen wir V noch mit dazu, erhalten wir eine offene Überdeckung $\mathfrak{V} = \{V_i \mid i \in I\} \cup \{V\}$ von X, denn jeder Punkt aus $X \setminus Z$ liegt in $V = X \setminus Z$, und jeder Punkt aus Z liegt in mindestens einer der Mengen U_i, also erst recht im zugehörigen V_i.

Da X kompakt ist, hat $\mathfrak{V}$ eine endliche Teilüberdeckung (von X). Wenn diese Teilüberdeckung ohne die Menge V auskommt, bilden die mit Z geschnittenen Überdeckungsmengen gleichzeitig eine endliche Teilüberdeckung von $\mathfrak{U}$ für die Menge Z. Andernfalls betrachten wir die Teilüberdeckung *ohne* die Menge V. Das ist dann eine endliche Teilmenge von $\mathfrak{U}$, und es ist auch eine offene Überdeckung von Z, denn jeder Punkt von $Z \subseteq X$ muß in einer der offenen Mengen aus der Teilüberdeckung liegen, und er liegt sicher nicht in $V = X \setminus Z$. Somit hat $\mathfrak{U}$ eine endliche Teilüberdeckung von Z.

■

Lemma: $f\colon X \to Y$ sei eine stetige Abbildung, und $Z \subseteq X$ sei kompakt. Dann ist auch $f(Z) \subseteq Y$ kompakt.

Beweis: $\mathfrak{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ seien ein System von in Y offenen Teilmengen, die eine Überdeckung von $f(Z)$ bilden, d.h.

$$f(Z) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i \,.$$

Da f eine stetige Abbildung ist, sind dann auch die Urbilder $f^{-1}(U_i)$ offen in X, und natürlich bilden sie eine Überdeckung von Z. Diese Überdeckung hat wegen der Kompaktheit von Z eine endliche Teilüberdeckung $\{f^{-1}(U_{i_1}), \ldots, f^{-1}(U_{i_r})\}$. Damit überdecken $U_{i_1}, \ldots, U_{i_r}$ die Menge $f(Z)$, die vorgegebene Überdeckung hat also eine endliche Teilüberdeckung.

■

Lemma: $f\colon X \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Abbildung, und $Z \subseteq X$ sei kompakt. Dann nimmt f sowohl sein Maximum als auch sein Minimum an; es gibt also Elemente x_m und x_M aus X, so daß für alle $x \in X$ gilt: $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$.

Beweis: Nach dem vorigen Lemma ist $f(Z)$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$, also insbesondere beschränkt. Somit existieren sowohl das Infimum m als auch das Supremum M von $f(Z)$. Wir müssen zeigen, daß beide in $f(Z)$ liegen.

Falls einer dieser beiden Punkte nicht in der abgeschlossenen Menge $f(Z)$ läge, müßte er in ihrem offenen Komplement $\mathbb{R} \setminus f(Z)$ liegen und hätte damit eine ε-Umgebung, die ganz in $\mathbb{R} \setminus f(Z)$ läge. Im Falle des Supremums würde dies bedeuten, daß beispielsweise auch $M - \frac{\varepsilon}{2}$ eine obere Schranke von $f(Z)$ wäre, im Widerspruch zur Definition des Supremums als *kleinster* oberer Schranke; im Falle des Infimums wäre entsprechend $m + \frac{\varepsilon}{2}$ eine untere Schranke.

Daher müssen m und M in $f(Z)$ liegen, es gibt also Elemente x_m und x_M in X, so daß $f(x_m) = m$ und $f(x_M) = M$ ist.

■

Wie aus der Analysis gewohnt, gilt auch im allgemeinen Fall

Lemma: X sei ein topologischer Raum, Z eine kompakte Teilmenge von X und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen aus Z. Dann gibt es (mindestens) eine gegen einen Punkt $z \in Z$ konvergente Teilfolge $(z_{n_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$.

Beweis: Falls es nur endlich viele verschiedene z_n gibt, können wir eine konstante und damit erst recht konvergente Teilfolge finden. Wir können daher annehmen, daß es unendlich viele verschiedene z_n gibt. Gäbe es keine gegen einen Punkt $z \in Z$ konvergente Teilfolge, hätte jeder Punkt $z \in Z$ eine offene Umgebung U_z, die höchstens endlich viele z_n enthielte. Das System dieser Umgebungen wäre eine Überdeckung der Menge Z, die wegen deren Kompaktheit eine endliche Teilüberdekkung hätte. Z wäre somit enthalten in einer endlichen Vereinigung von Mengen, von denen jede höchstens eine endliche Anzahl der unendlich vielen Elemente $z_n \in Z$ enthielte, ein Widerspruch.

■

Lemma: Ist X ein HAUSDORFF-Raum und Z eine kompakte Teilmenge von X, so gibt es zu jedem Punkt $x \notin Z$ offene Mengen $U, V \subseteq X$, so daß $Z \subset U$, $x \in V$ und $U \cap V = \emptyset$ ist.

Beweis: Da X ein HAUSDORFF-Raum ist, gibt es zu jedem $z \in Z$ offene Umgebungen U_z von z und V_z von y, so daß $U_z \cap V_z = \emptyset$ ist. Die sämtlichen U_z überdecken natürlich Z; da dies eine kompakte Menge ist, reichen dazu bereits endlich viele dieser Umgebungen. Es gibt daher endlich viele Punkte $z_1, \ldots, z_r$, so daß Z in der Vereinigung der Mengen U_{z_i} liegt. Da U_{z_i} leeren Durchschnitt mit V_{z_i} hat, ist diese Umgebung erst recht disjunkt zum Durchschnitt $V = V_{z_1} \cap \cdots \cap V_{z_r}$ aller V_{z_i}, und damit ist auch $U \cap V = \emptyset$. Da Z in U liegt und x in V, folgt die Behauptung.

■

Korollar: Ist X ein HAUSDORFF-Raum und Z eine kompakte Teilmenge von X, so ist Z der Durchschnitt aller in X offener Mengen, die Z enthalten.

Beweis: Wir müssen wir uns nur überlegen, daß es zu jedem Punkt $x \notin Z$ eine offene Menge $U \supseteq Z$ gibt, die x nicht enthält, und das ist nach dem gerade bewiesenen Lemma klar.

■

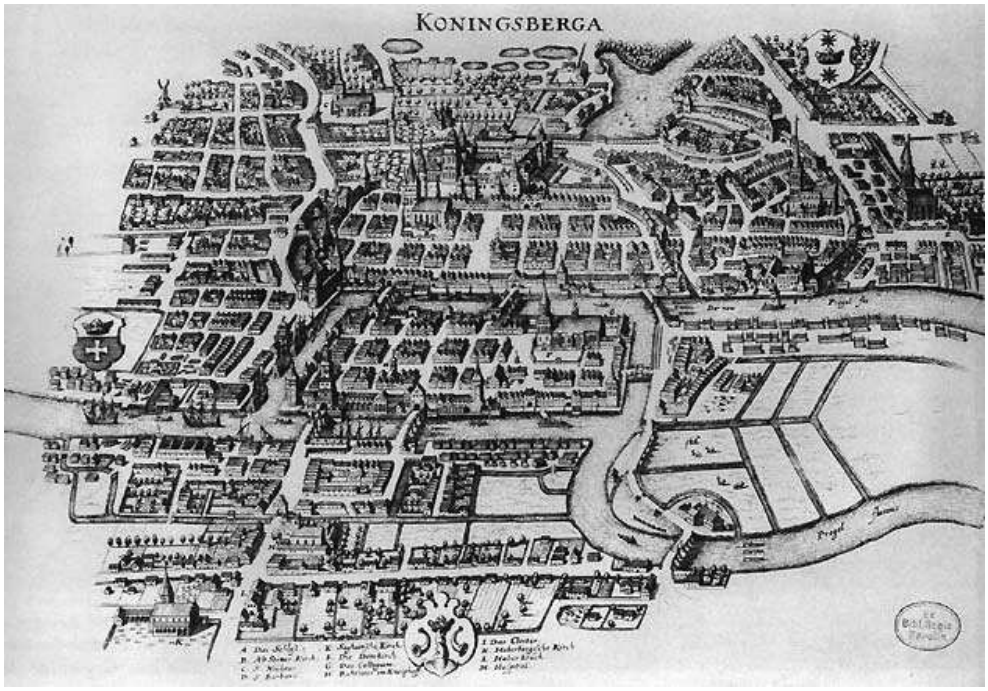
Kapitel 4
Auf dem Weg zur algebraischen Topologie

Die Aussagen der Topologie, die wir bislang kennengelernt haben, sind eher qualitativer Natur; die uralte Maxima der Pythagoräer *Alles ist Zahl* scheint hier nicht zu gelten. Andererseits zeigt die Erfahrung aus mehreren Jahrtausenden Mathematik, daß die erfolgreiche Lösung komplexer mathematischer Probleme nur selten ganz ohne Rechnung möglich ist. Schon lange bevor die Topologie als Teilgebiet der Mathematik etabliert war, wurden daher topologische Fragestellungen in Zahlen übersetzt und zumindest teilweise so gelöst. In diesem Kapitel soll dies anhand einiger einfach zu formulierender klassischer Probleme illustriert werden.

§ 1: Das Königsberger Brückenproblem

Wie bereits zu Beginn der Vorlesung erwähnt, war EULERs Lösung des Königsberger Brückenproblems die erste Arbeit, die nach heutigem Verständnis der Topologie zuzuordnen ist. Die Abbildung auf der nächsten Seite zeigt Königsberg nach einem 1652 von MERIANs Söhnen veröffentlichten Kupferstich.

Damals führten sieben Brücken über den Pregel, der sich innerhalb der Stadt zudem noch teilte und so eine Insel abtrennte, den Kneiphof. Eine der damals in Königsberg (sicherlich nicht mit höchster Priorität) diskutierten Fragen war, ob man seinen Sonntagsspaziergang so legen könne, daß man jede der sieben Brücken genau einmal überquere. Da es $7! = 5040$ mögliche Reihenfolgen gibt, wäre es unrealistisch gewesen, diese allesamt systematisch durchzuprobieren: Kaum jemand erlebt 5040 Sonntage, und auch das theoretische Durchprobieren war, da es



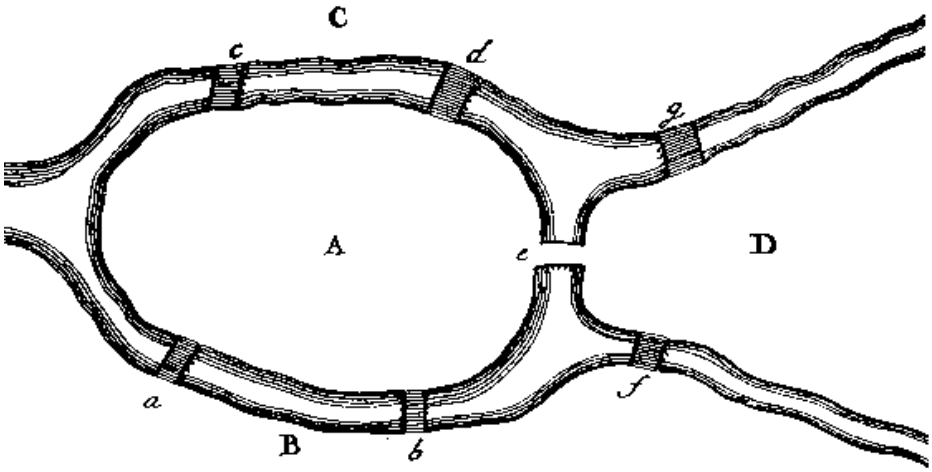
damals noch keine Navigationscomputer gab, kaum praktikabel. Durch Zufall oder Intuition hatte noch niemand einen solchen Weg gefunden.

In seiner Arbeit *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, die 1736 in den Annalen der St. Petersburger Akademie erschien, erklärte EULER warum: Es kann keinen solchen Sonntagsspaziergang geben.

Als echter Mathematiker vereinfachte er zunächst die Geographie von Königsberg radikal auf das, was für die Lösung des Brückenproblems wirklich wesentlich ist. Die unten reproduzierte Zeichnung aus seiner Arbeit ist ästhetisch sicherlich keine Konkurrenz zu MERIAN, für die mathematische Behandlung des Problems aber deutlich nützlicher.

Er bennent dort auch die vier durch Arme des Pregel getrennten Teile Königsbergs durch die Buchstaben A bis D; der oben erwähnte Kneiphof beispielsweise ist A. Nachdem er die Karte so auf das Wesentliche reduziert hat, zählt er, wie viele Brücken in jedes der vier Gebiete führen: Die Anzahl ist jeweils ungerade, im Falle des Kneiphofs etwa sind es fünf.

Nehmen wir an, ein Königsberger beginnt seinen Sonntagsspaziergang auf dem Kneiphof. Da dieser durch fünf Brücken mit dem Rest von



Königsberg erbunden ist, muß jeder Weg, der genau einmal über jede dieser fünf Brücken führt, außerhalb des Kneiphofs enden. Umgekehrt muß auch jeder entsprechende Weg, der außerhalb des Kneiphofs beginnt, in diesem enden. Somit kann es keinen Sonntagsspaziergang mit gleichem Anfangs- und Endpunkt geben, der genau einmal über jede der sieben Brücken führt.

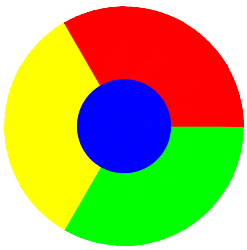
Nun betrachtete aber wohl nicht jeder Königsberger seinen Sonntagsspaziergang als Rundgang; mancher Bürger hatte sicherlich eher das Haus eines Verwandten oder eine Gaststätte als Ziel. Aber auch ein solcher Weg ist unmöglich, denn für jedes der vier Gebiete A, B, C, D gibt es eine ungerade Anzahl von Brücken, die dieses Gebiet mit den anderen verbinden. Jedes der vier Gebiete müßte daher entweder Anfangs- oder Endpunkt des Spaziergangs sein, was natürlich nicht möglich ist.

§2: Kartenfärbungsprobleme

Mehr als hundert Jahre später, wahrscheinlich um 1852, kolorierte FRANCIS GUTHRIE eine Karte der Grafschaften von England und gewann dabei den Eindruck, daß er jede Karte mit nur vier Farben so einfärben könne, daß keine zwei benachbarte Gebiete die gleiche Farbe haben. Mit weniger als vier Farben kann man offensichtlich nicht auskommen: Betrachtet man etwa auf einer Europakarte die Staaten Deutschland, Frankreich, Belgien und Luxemburg, so hat jeder der vier mit jedem anderen eine gemeinsame Grenze, so daß jeder dieser vier Staaten seine

eigene Farbe braucht. Schematisch ist diese Situation in der folgenden Karte 1 dargestellt.

Karte 1



Natürlich war GUTHRIE ein Mathematiker: Ein Kartograph, der Farben benutzt, um möglichst viel Information darzustellen, käme nie auf die Idee, die Vielfalt der zur Verfügung stehenden Farben künstlich einzuschränken.

FRANCIS GUTHRIE (1831-1899) studierte zunächst Mathematik (B.A. 1850), dann Jura (LL.B. 1852) am University College London; 1856 wurde er *fellow*. Er arbeitete zunächst als Rechtsanwalt in London, bis er 1861 eine Mathematikprofessur am Graaf-Reinet College in Südafrika annahm; später wechselte er nach Kapstadt. Er interessierte sich nicht nur für Mathematik, sondern gab auch öffentliche Vorlesungen über Botanik und erforschte die südafrikanische Pflanzenwelt; mehrere Pflanzenarten sind noch heute nach ihm benannt. Auf seinen Wanderungen durch die Berge erforschte er auch das Gelände für den Bau einer geplanten Eisenbahn.

FRANCIS GUTHRIE hatte sein Mathematikstudium bereits 1850 abgeschlossen; 1852 studierte er Jura. Deshalb wandte er sich an seinen jüngeren Bruder FREDERICK GUTHRIE, der damals, ebenfalls am University College, bei AUGUSTUS DE MORGAN Mathematik studierte. DE MORGAN war sofort begeistert, als ihm FREDERICK GUTHRIE am 23. Oktober 1852 die Vermutung seines Bruders präsentierte; er schrieb noch am selben Tag einen Brief an den wohl bekanntesten Mathematiker der damaligen Zeit auf den britischen Inseln, Sir WILLIAM ROWAN HAMILTON vom Trinity College in Dublin, dessen Entdeckung der Quaternionen ihn auch bei einem großen nichtmathematischen Publikum berühmt gemacht hatte. HAMILTON hatte allerdings kein großes Interesse und schrieb zurück: *I am not likely to attempt your quaternion of colour very soon.*

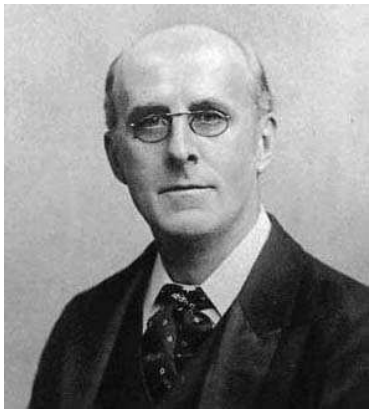
AUGUSTUS DE MORGAN (1806–1871) begann 1823 im Alter von 16 Jahren sein Mathematikstudium in Cambridge, das er nur mit einem Bachelor-Grad abschloß, da er die für einen Master notwendige Theologieprüfung ablehnte. Danach begann er in London ein Jurastudium, bewarb sich aber 1827 auch für eine Professur am neu gegründeten University College, wo er 1828 der erste Mathematikprofessor wurde. Zweimal, 1831 und 1866, legte er diese Professur aus Protest gegen die Diskriminierung von Kollegen nieder; 1836 wurde er neu berufen. Seine Arbeiten beschäftigen sich hauptsächlich mit Analysis und Logik.

SIR WILLIAM ROWAN HAMILTON (1805–1865) ging nie zur Schule. Trotzdem sprach er schon mit fünf Jahren griechisch, lateinisch und hebräisch; mit 14 beherrschte er über ein Dutzend Sprachen. Als 13-Jähriger las er das (französischsprachige) Algebra-Buch von CLAIRAUT. Mit 18 kam er ans Trinity College in Dublin, wo er bereits als Student Arbeiten über Optik publizierte. 1827, noch vor Abschluß seines Studiums, ernannte ihn das Trinity College zum Professor der Astronomie. Sein Interesse an Astronomie war allerdings gering, und er verbrachte den Großteil seiner Zeit mit Mathematik. Seine bekannteste Entdeckung sind die Quaternionen.

Briefe von DE MORGAN zeigen, daß dieser sich auch in den folgenden Jahren noch häufig mit dem Problem beschäftigte und es auch bekannt machte, danach gab es jedoch keine weiteren Aktivitäten mehr bis ARTHUR CAYLEY 1879 einen Übersichtsartikel in den *Proceedings of the Royal Geographical Society* veröffentlichte.

Ein Jahr später veröffentlichte ein ehemaliger Student CAYLEYs, der Mathematiker und Jurist Sir ALFRED BRAY KEMPE, im *American Journal of Mathematics* einen Beweis der Vermutung. Diese Zeitschrift war gerade erst 1878 von dem englischen Mathematiker JAMES JOSEPH SYLVESTER an der selbst erst zwei Jahre vorher in Baltimore gegründeten *Johns Hopkins University* begründet worden. Diese Universität sollte sich zwar in den folgenden Jahrzehnten zu einem der führenden Zentren der amerikanischen Mathematik entwickeln, und das *American Journal* gehört heute zu den international angesehensten mathematischen Fachzeitschriften, damals aber war es naturgemäß insbesondere in Eu-

ropa noch kaum bekannt. Da CAYLEY und SYLVESTER nicht nur mathematisch zusammenarbeiteten, sondern auch gute Freunde waren, sollte KEMPE seine Arbeit wohl dort veröffentlichen, um die Zeitschrift bekannter zu machen; tatsächlich führte dies wohl eher dazu, daß die Arbeit kaum gelesen wurde – auch wenn allgemein anerkannt wurde, daß KEMPE das Problem gelöst hatte.



SIR ALFRED BRAY KEMPE (1849-1922) studierte Mathematik am Trinity College in Cambridge; nach seinem Abschluß 1872 begann er jedoch eine juristische Ausbildung und arbeitete auch Zeit seines Lebens als Jurist. Insbesondere war er einer der führenden Experten für Kirchenrecht und hatte in dieser Eigenschaft viele Funktionen. Mathematik und Musik waren seine beiden großen Hobbies; seine mathematischen Arbeiten befassen sich vor allem mit Kinematik und der Philosophie der Mathematik, einige auch mit Algebra und eine mit dem Vierfarbenproblem.

Erst 1890 fand der englische Mathematiker JOHN PERCY HEAWOOD einen Fehler im Beweis. Dabei handelte es sich nicht nur um eine Lücke, sondern HEAWOOD konnte ein Beispiel einer Karte konstruieren, für die KEMPEs Konstruktion definitiv nicht funktionierte – auch wenn zumindest diese Karte trotzdem mit vier Farben gefärbt werden konnte. Damit war die Vierfarbenvermutung wieder offen. Immerhin reichten KEMPEs Argumente aus, um zu beweisen, daß man stets mit fünf Farben auskommt. Außerdem verallgemeinerte HEAWOOD das Problem auf Karten, die nicht mehr eben (oder auf dem Globus, d.h. einer Kugel) sind, sondern beispielsweise auf einem Torus, einer dicken Acht oder einer Brezel, *usw.* (Mathematiker reden von Flächen vom Geschlecht eins, zwei, drei, *usw.;* die Kugel hat Geschlecht null.) Er zeigte, daß man für eine Fläche vom Geschlecht $g \geq 1$ immer mit

$$\left[\frac{7+\sqrt{1+48g}}{2}\right]$$

auskommt und behauptete, daß man diese auch wirklich braucht – was erst 1968 von RINGEL und YOUNG vollständig bewiesen wurde. In dieser Formel bezeichnet $[x]$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x, für

den Torus braucht man also $\frac{7+7}{2} = 7$ Farben, für die Acht

$$\left[\frac{7+\sqrt{97}}{2}\right] = \left[\frac{7+9{,}8488578\ldots}{2}\right] = 8$$

und für die Brezel

$$\left[\frac{7+\sqrt{145}}{2}\right] = \left[\frac{7+12{,}01459\ldots}{2}\right] = 9\,,$$

und so weiter. Für $g = 0$ erhält man den erwarteten Wert $\left[\frac{4+4}{2}\right] = 4$, aber wie wir gleich sehen werden, funktioniert HEAWOODs Beweis nur für $g \geq 1$.

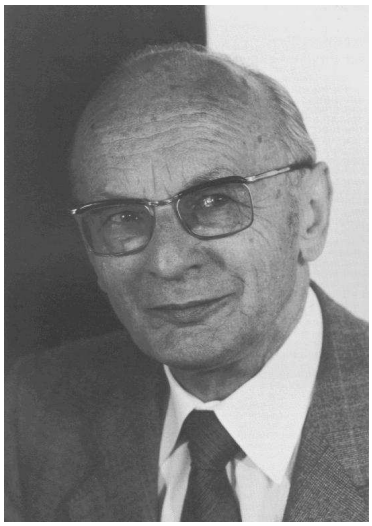
PERCY JOHN HEAWOOD O.B.E. (1861–1955) studierte am Exeter College in Oxford. 1887 wurde er Dozent an der heutigen Universität Durham, an der er bis zum Alter von 78 Jahren arbeitete, seit 1911 auf einem Lehrstuhl für Mathematik, von 1926-1928 auch als *Vice Chancellor.* Seine mathematische Forschung drehte sich ausschließlich um das das Vierfarbenproblem, bis zu seiner letzten Arbeit, der er 1949 als 88-Jähriger veröffentlichte. Daneben schrieb er auch mehrere Arbeiten für Schüler und interessierte sich sehr für den Mathematikunterricht. Seinen O.B.E. erhielt er für seine Aktivitäten zur Rettung des Schlosses von Durham.

Was das eigentliche Vierfarbenproblem betrifft, gab es lange Zeit nur kleine Fortschritte. Die grundlegende Idee der KEMPEschen Arbeit wurde von verschiedenen Mathematikern verfeinert und führte zu Beweisen für immer größere Klassen von Graphen, aber von einer allgemeinen Lösung war man immer noch weit entfernt.

Einen wesentlich neuen Aspekt brachte erst Anfang kurz nach 1960 der deutsche Mathematiker HEINRICH HEESCH ins Spiel: Er fand eine Möglichkeit, wie man Computer an der Beweisarbeit beteiligen konnte.

Erste Experimente zeigten, daß der Ansatz grundsätzlich funktionieren könnte, daß allerdings der Rechenaufwand für eine vollständige Lösung enorm sein müßte: Die meisten betrachteten Fälle führten auf den Computern der damaligen Zeit zu stundenlangen Rechenzeiten. Da Computer damals nicht nur sehr langsam, sondern vor allem auch extrem teuer

waren, hatte auch eine technische Hochschule wie Hannover nur ein zentrales Rechenzentrum mit einem einzigen Computer für die gesamte Universität. Langwierige Rechnungen waren somit sehr teuer und nur über Forschungsgelder der DfG (Deutsche Forschungsgemeinschaft) finanzierbar. Aus diesem Grund, und auch weil einige DfG-Gutachter Zweifel am endgültigen Erfolg des Projekts hatten und die Mittel daher eher zögerlich flossen, kamen die Forschungen von HEESCH und seinen Mitarbeitern nur sehr langsam voran.

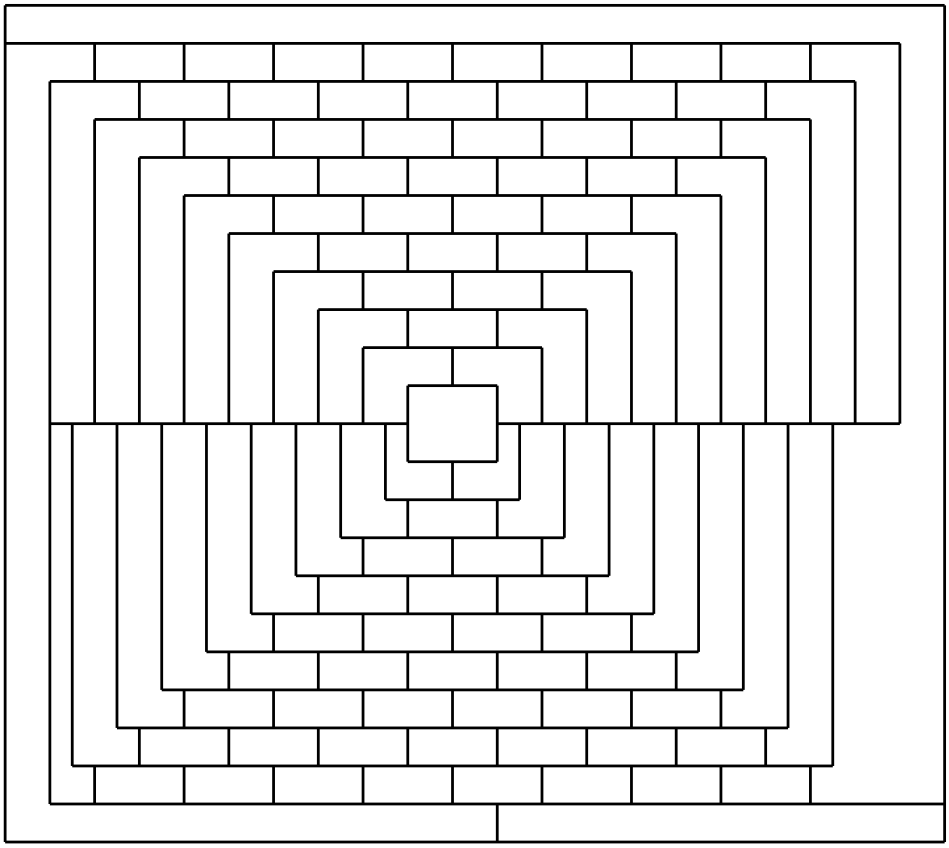


HEINRICH HEESCH (1906–1995) promovierte 1929 in Zürich mit einer Arbeit über Kristallographie; danach wurde er Assistent von HERMANN WEYL in Göttingen. Nachdem dieser 1933 Deutschland verlassen hatte, wurde er mit seiner Vertretung beauftragt; da er sich weigerte, dem nationalsozialistischen Dozentenbund beizutreten, konnte er sich aber nicht habilitieren und mußte 1935 die Universität verlassen. Bis nach Kriegsende arbeitete er als Mathematik- und Musiklehrer. 1955 ging er an die TH Hannover, habilitierte 1958 und wurde 1966 zum Professor ernannt. Seine Arbeiten beschäftigen sich nicht nur mit dem Vierfarbenproblem, sondern auch mit anderen geometrischen Fragen wie etwa regulären Parkettierungen der Ebene.

In mindestens einem Lehrbuch der damaligen Zeit wurden allerdings auch Zweifel geäußert, ob die Vierfarbenvermutung überhaupt richtig sei, und in der Tat veröffentlichte MARTIN GARDNER am ersten April 1975 in seiner Mathematikkolumne im *Scientific American* das unten abgedruckte Beispiel einer Karte mit 110 Ländern, für die man mindestens fünf Farben braucht.

Der Artikel rief ein großes Echo hervor: Mehr als Tausend Leserbriefe gingen beim *Scientific American* ein, darunter auch einige hundert, die eine Vierfärbung der angegebenen Karte enthielten. GARDNERs Kolumne in der fraglichen Ausgabe hatte also mehr mit dem Datum zu tun als mit der Korrektheit der Vierfarbenvermutung.

Ein Jahr später veröffentlichten WOLFGANG HAKEN und KENNETH APPEL einen computergestützten Beweis der Vierfarbenvermutung, zurückgehend auf sowohl eine frühere Zusammenarbeit von HAKEN mit HEESCH, als auch auf zahlreiche darüber hinausgehende mathematische



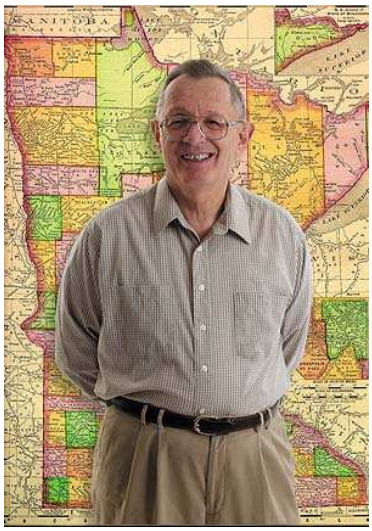
MARTIN GARDNER (*1914) wurde in Tulsa, Oklahoma geboren und studierte an der Universität Chicago, wo er 1936 mit einen Bachelor in Philosophie abschloß. Danach wurde er Reporter bei der Tulsa Tribune, war im Krieg bei der Navy und arbeitete anschließend als freier Schriftsteller. Von 1956 bis 1986 hatte er eine regelmäßige Kolumne über unterhaltsame Mathematik im *Scientific American.* Er schrieb über hundert Bücher zu Themen aus der Mathematik, Philosophie, Naturwissenschaften, Literatur, außerdem auch zwei Romane und mehrere Kurzgeschichten. Seit 2004 lebt er wieder in Oklahoma.

wie auch programmiertechnische Optimierungen. Die University of Illinois at Urbana-Champaign, an der HAKEN und APPEL lehrten, kündigte dies unter anderem dadurch an, daß sie ihre Frankiermaschinen anstelle

einer Absenderangabe die Worte

FOUR COLORS
SUFFICE

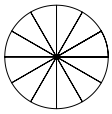
auf alle ausgehenden Briefe stempeln ließ.



KENNETH APPEL (*1932, Bild) war einer der ersten amerikanischen Mathematiker, die Computer in der mathematischen Forschung auch jenseits von klassischen Anwendungen wie der Numerik einsetzten. Er arbeitete u.a. über rekursive Funktionen, Kombinatorik und Gruppentheorie. 1993 wurde er Dekan der mathematischen Fakultät der University of New Hampshire.
WOLFGANG HAKEN (*1928) wurde in Berlin geboren und studierte in Kiel, wo er einen Vortrag von HEESCH über den Vierfarbensatz hörte. 1965 emigrierte er nach USA, wo HEESCH mehrfach bei ihm zu Gast war. Seine sonstigen Arbeiten beschäftigen sich vor allem mit dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten; dafür verlieh ihm die Universität Frankfurt 1993 die Ehrendoktorwürde.

§3: Was ist eine Karte?

Bevor wir uns daran machen können, irgendetwas über Kartenfärbungen zu beweisen, müssen wir zunächst die Begriffe klären. Wörter wie „Länder“ oder „Territorien“ und „benachbart“ scheinen zwar umgangssprachlich klar genug zu sein, aber wenn wir sie auf Grenzfälle anwenden, wird schnell klar, daß noch Klärungsbedarf besteht. Dabei wird sich herausstellen, daß einige anschaulich ziemlich klare Sachverhalte mathematisch erstaunlich komplex sein können.



Betrachten wir zunächst n Gebiete die in einem Kreis wie Kuchenstücke nebeneinander liegen. Alle diese Gebiete treffen sich im Mittelpunkt des Kreises; sollen wir sie deshalb als benachbart bezeichnen?

Wenn ja, muß jedes der n Gebiete seine eigene Farbe bekommen; dann kann also offensichtlich kein Vierfarbensatz gelten und, da wir n beliebig groß wählen können, reicht auch keine sonstige endliche Anzahl von Farben für *jede* Karte. Wenn wir das Problem nicht von vornherein unlösbar machen wollen, dürfen wir also Länder, die sich nur in einem Punkt (oder in zwei oder allgemeiner in endlich vielen Punkten) berühren, nicht als benachbart betrachten: Zwei benachbarte Länder müssen mindestens eine gemeinsame Grenzlinie haben. Dann können wir im obigen Beispiel nicht benachbarte Sektoren gleich färben. Allgemein reichen in dieser Situation offenbar für gerade n zwei Farben, für ungerade $n > 1$ brauchen wir drei.

In der realen Welt gibt es Gebiete, die sich nur in einem Punkt berühren: Im Zentrum der Vereinigten Staaten von Amerika etwa sind die Grenzen zwischen zwei Bundesstaaten oft weitgehend durch Längen- und Breitengrade statt durch geographische Gegebenheiten definiert; in einem Punkt namens *Four Corners* kommen dabei (im Uhrzeigersinn) die Staaten Utah, Colorado, New Mexico und Arizona zusammen, wobei in unserem Sinne weder Utah und New Mexico noch Colorado und Arizona benachbart sind.

Eine wirkliche *Definition* von benachbart haben wir damit allerdings noch nicht: Dazu müssen wir erst festlegen, was eine „Grenzlinie“ sein soll. In gewisser Weise sind wir damit sogar vom Regen in die Traufe

gekommen, denn wie der inzwischen emeritierte Karlsruher Mathematikprofessor HARRO HEUSER in seinem Lehrbuch *Analysis 2* (S179) schreibt:

> Die im Alltag auftretenden Bögen sind so harmlos und übersichtlich gebaut, daß die mathematische Welt einen Schock erlitt, als ihr Peano im Jahre 1890 einen Bogen Γ im $\mathbb{R}^2$ vorführte, der ein ganzes Quadrat Q ausfüllte, für den also $\Gamma = Q$ war. Solche *flächenfüllenden Bögen* werden Peanobögen (oder Peanokurven) genannt. Die Anschauung gerät in die allergrößte Verlegenheit, wenn sie versucht, in den Bau derart pathologischer Bögen einzudringen. Die bloße Existenz der Peanobögen zeigt, daß der Begriff des Bogens, in dem ja nicht mehr als die Forderung der Stetigkeit steckt, viel zu allgemein ist, um in der Mathematik und ihren Anwendungen von Nutzen sein zu können. Es ist eine Tatsache von erheblicher Bedeutung, daß bereits Jordanbögen keine Peanopathologien mehr aufweisen. Immerhin können auch sie noch so unübersichtlich sein, daß die Anschauung sich weigert, ihrem Verlauf zu folgen. Einen hochexotischen Jordanbogen hat H. v. Koch im Jahre 1906 konstruiert, und eine kleine Modifikation dieser Konstruktion liefert eine Jordankurve von anschauungslähmender Ausgefallenheit. Ungebärdige Kurven dieser Art haben das ihrige dazu beigesteuert, das Vertrauen in die „anschauliche Evidenz“ zu untergraben und letztere als Beweisquelle völlig auszutrocknen.

Wir müssen also, wie so oft in der Mathematik, vorsichtig sein mit unseren Begriffen und auch mit der Art und Weise, wie wir mit ihnen umgehen. Der Einwand, daß wir es bei Karten mit „anständigen“ Kurven zu tun haben, löst unsere Probleme leider nicht: Erstens müßten wir dazu definieren, was eine „anständige“ Kurve sein soll, und zweitens verhalten sich zumindest die Ländergrenzen in der Natur eher wie die von HEUSER erwähnte KOCH-Kurve als wie die uns als typische Kurven bekannten Kreise, Parabeln oder Graphen differenzierbarer Funktionen.

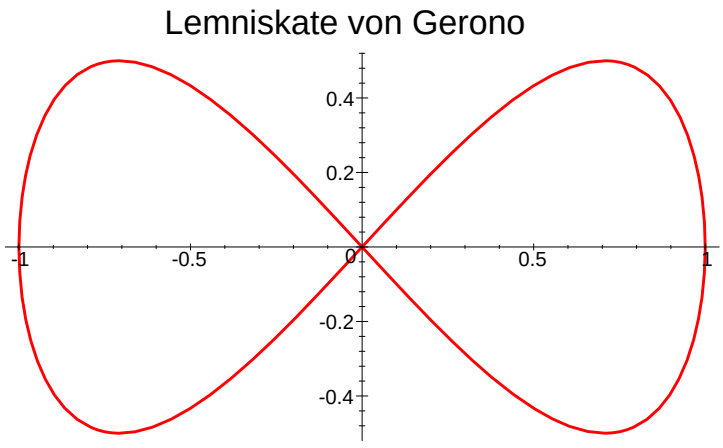
Letzteres exemplifizierte beispielsweise BENOIT B. MANDELBROT in seinem erstmalig 1977 erschienenen Buch *The fractal geometry of nature* mit der Frage: *How long is the coast of Britain?* Die Antworten, die in verschiedenen Nachschlagewerken zu finden sind, unterscheiden sich

zum Teil beträchtlich, denn da die Küste in *jeder* Vergrößerung ungefähr dieselben Verästelungen hat, hängt das Ergebnis der Messung ganz wesentlich von der Länge des verwendeten Maßstabs ab. So ist auch nicht verwunderlich, daß die gemeinsame Grenze zwischen Spanien und Portugal in der portugiesischen Enzyklopädie etwa 20% länger als in der spanischen: Die Maßstäbe waren jeweils verschieden, und, wie MANDELBROT schreibt, erscheint es durchaus verständlich, daß Portugal als kleineres Land mit einen feineren Maßstab mißt als Spanien.

Wir brauchen daher allgemeinere Kurvenbögen als die altbekannten Funktionsgraphen. Wir könnten beispielsweise die bei der Definition des Wegzusammenghangs benutzten Wege nehmen, jedoch sind diese nun wieder zu allgemein: Betrachten wir etwa die Abbildung

$$\varphi\colon \begin{cases} [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^2 \\ \qquad t \mapsto \big(\cos t, \cos t \cdot \sin t\big) \end{cases},$$

so erhalten wir die sogenannte Lemniskate von GERONO:



Diese Kurve schneidet sich selbst im Nullpunkt, und sie begrenzt zwei verschiedene Innengebiete. Ländergrenzen die so aussehen, wollen wir nicht zulassen; deshalb müssen wir die obige Definition noch etwas einschränken:

Definition: Ein Weg $\varphi\colon [0,\,1] \to \mathbb{R}^2$ heißt JORDAN-Bogen, wenn er sich nicht selbst überschneidet, d.h. wenn $\varphi(s) = \varphi(t)$ nur gelten kann, wenn $s = t$ oder (im Falle einer geschlossenen Kurve) $s, t \in \{0, 1\}$ ist. Eine JORDAN-Kurve ist eine geschlossene Kurve mit dieser Eigenschaft.

Die Lemniskate ist somit keine JORDAN-Kurve, denn hier ist sowohl $\varphi(-\frac{\pi}{2})$ als auch $\varphi(\frac{\pi}{2})$ gleich dem Nullpunkt. (Die Umparametrisierung auf das Intervall $[0,\,1]$ wird hoffentlich niemandem Schwierigkeiten bereiten.)

Bei einer JORDAN-Kurve sollte es nicht, wie bei der Lemniskate, möglich sein, daß das Innengebiet in zwei Teile zerfällt, und in der Tat besagt der JORDANsche Kurvensatz, daß eine solche Kurve die Ebene in genau zwei Gebiete zerlegt, das Äußere und das Innere. So klar dieser Satz anschaulich auch scheint, sein Beweis erfordert einen erstaunlich hohen Aufwand und wird daher meist, wenn überhaupt, nur Spezialvorlesungen aus dem Bereich der geometrischen Topologie behandelt.

MARIE ENNEMOND CAMILLE JORDAN (1838–1922) war der Sohn eines Ingenieurs; nach seinem Mathematikstudium an der École polytechnique arbeitete auch er in diesem Beruf. Daneben beschäftigte er sich weiterhin viel mit Mathematik. 1876 wurde er Mathematikprofessor an der École polytechnique und von 1883–1885 auch am Collège de France. Seine mathematischen Arbeiten beschäftigen sich mit praktisch allen Teilgebieten der damaligen Mathematik, von nichtlinearen Gleichungen über die Analysis zur Geometrie und der damals *analysis situs* genannten Topologie, in der es um Fragen wie den obigen Kurvensatz geht.

Wir vereinbaren, daß zwei Gebiete benachbart sein sollen, wenn sie mindestens einen JORDAN-Bogen als gemeinsame Grenze haben. Aber was genau soll ein Gebiet sein?

Nicht jeder Staat hat ein zusammenhängendes Territorium: Beispielsweise ist Alaska vom Kerngebiet der Vereinigten Staaten aus auf dem Landweg nur über Kanada erreichbar; genauso ist das Gebiet um Kaliningrad, dem ehemaligen Königsberg, vom restlichen Rußland aus nur via Lettland oder Weißrußland und Litauen oder Polen erreichbar. Frankreich hat gar seine über die ganze Welt verstreuten *Départements*

d'Outremer, und falls wir das Meer als eigenständiges Gebiet betrachten, sorgen Inseln dafür, daß auch Deutschland, Italien, Spanien und viele andere Staaten keine zusammenhängenden Landgebiete sind.

Falls wir hier verlangen wollten, daß zusammengehörende, aber räumlich auseinander liegende Teilgebiete jeweils dieselbe Farbe haben, kommen wir sicher nicht immer mit vier Farben aus; es ist einfach, eine Geographie zu entwerfen, in der jeder Staat jeden anderen als Nachbar hat, indem man ihm einfach in jedem anderen Staat eine mit dem Kerngebiet unverbundene Enklave gibt.

Das Vierfarbenproblem kann daher höchstens dann lösbar sein, wenn wir alle Territorien als zusammenhängend annehmen. (HEAWOOD bewies auch Abschätzungen für die Anzahl von Farben, die man für Karten mit einer gewissen Anzahl unzusammenhängender Staaten braucht, aber die entstehenden Zahlen sind natürlich deutlich größer als vier.)

Für die exakte Definition einer Karte machen wir es wie die Kartographen, die im Gegensatz zu den Politikern von den Grenzen ausgehen und die Staaten als das betrachten, was zwischen den Grenzen liegt:

Wir *definieren* daher eine Karte als eine endliche Menge von Kurvenbögen, die sich höchstens in ihren Endpunkten schneiden dürfen.

Die Länder sind diejenigen Gebiete, die von den Kurvenbögen begrenzt werden. Um dies mathematisch exakt zu definieren, betrachten wir die Ebene *ohne* die Kurvenbögen. Anschaulich zerfällt diese Menge M in mehrere Gebiete, die Länder, wobei es zwischen je zwei Punkten, die zum selben Land gehören, einen Weg geben sollte, der die beiden verbindet, d.h. einen Kurvenbogen, der ganz im Land liegt und den einen der beiden Punkte als Anfang, den anderen als Ende hat.

Die können wir als Definition eines Landes nehmen: Wir sagen, zwei Punkte haben die gleiche Nationalität, wenn sie sich durch einen Kurvenbogen in M verbinden lassen, d.h. also durch einen Kurvenbogen, der keine Grenze überschneidet. Ein Land ist dann einfach die Menge von Punkten einer Nationalität.

(Um nur kurz anzudeuten, daß das nicht alles ganz so einfach ist, sei nur darauf hingewiesen, daß selbst die anschaulich klare Feststellung, daß es auf einer solchen Karte nur endlich viele Länder gibt, nur mit ziemlichem Aufwand allgemein zu beweisen ist.)

§4: Graphen

Da sich unsere anschauliche Vorstellung von Karten, wie wir gerade gesehen haben, nur schwer in mathematischen Formalismus übersetzen läßt, ist es zur Lösung des Vierfarbenproblems geschickter, wenn wir das Problem in ein zwar etwas weniger anschauliches, dafür aber formal besser zugängliches Problem übersetzen. Auch diese Übersetzung ist anschaulich ziemlich klar und für konkrete Karten einfach durchzuführen:

Zunächst wählen wir in jedem der auf der Karte dargestellten Territorien *irgendeinen* Punkt (z.B. eine zentral gelegene Stadt oder die Hauptstadt oder den Schwerpunkt) und verbinden diesen Punkt mittels je eines Kurvenbogens mit den entsprechenden Punkten der Nachbarterritorien. Die Kurvenbögen wählen wir so, daß sie sich gegenseitig nicht schneiden – außer natürlich in den zu verbindenden Punkten, wo im allgemeinen mehrere Bögen zusammenlaufen. Anschaulich ist ziemlich klar, daß dies möglich ist; ein *Beweis*, daß dies *immer* funktioniert, erfordert leider wie der des JORDANschen Kurvensatzes einen beträchtlichen Aufwand.

Das entstehende Gebilde aus Punkten und Kurvenbögen bezeichnet man in der Mathematik als einen *Graphen:* Formal ist er gegeben durch eine Menge von Ecken, den ausgewählten Punkten, und einer Menge von Kanten, den Kurvenbögen, die gewisse Ecken miteinander verbinden.

Jede Kartenfärbung führt sofort zu einer Färbung des Graphen: Jede Ecke bekommt die Farbe des zugehörigen Gebiets. Die Kanten bekommen keine Farbe. Offensichtlich haben auf der Karte genau dann keine zwei benachbarten Gebiete dieselbe Farbe, wenn keine zwei durch eine Kante verbundenen Ecken des Graphen dieselbe Farbe haben.

Haben wir umgekehrt jeder Ecke des Graphen eine Farbe gegeben derart, daß keine zwei durch eine Kante verbundenen Ecken dieselbe Farbe

haben, so führt dies sofort zu einer Kartenfärbung, in der keine zwei benachbarten Gebiete dieselbe Farbe haben.

Das Kartenfärbungsproblem wird damit äquivalent zum folgenden graphentheoretischen Problem: Man färbe die Ecken des Graphen so, daß keine zwei durch eine Kante verbundenen Ecken dieselbe Farbe haben. In dieser Form wurde das Problem seit KEMPEs Zeiten stets bearbeitet, und in dieser Form wurde es auch gelöst.

§5: Sechs Farben reichen

Die Graphen, die wir im vorigen Paragraphen definiert haben, liegen natürlich in der Ebene; wir haben daher nicht nur Ecken und Kanten, sondern auch Flächen, die durch die Kanten berandet werden.

Solche Graphen erhält man auch, wenn man von zusammenhängenden Polyedern „ohne Löcher“ ausgeht, diese ins Innere einer Kugel setzt und die Kanten auf die Kugeloberfläche projeziert. Das ist dann zwar ein Graph auf der Kugeloberfläche, aber durch stereographische Projektion von einem Punkt, der auf keiner Kante liegt, erhalten wir daraus problemlos einen Graphen in der Ebene.

Für solche Graphen gilt der EULERsche Polyedersatz:

$$\#\,\text{Ecken} - \#\,\text{Kanten} + \#\,\text{Flächen} = 2\,.$$

(Zu den Flächen zählt dabei auch eine unendliche, nämlich die Außenfläche jenseits aller Kanten.)

Der *Beweis* erfolgt durch vollständige Induktion nach der Anzahl der Kanten: Im Falle einer einzigen Kanten haben wir auch nur eine Fläche, aber zwei Ecken; der Satz ist also richtig.

Hat der Graph mehr als eine Kante, so entfernen wir eine von diesen, achten aber darauf, daß der Kantenzug als ganzer auch nach dem Entfernen der Kante noch zusammenhängend bleibt.

Falls die entfernte Kante zwei Flächen voneinander trennte, fallen diese anschließend zusammen, d.h. außer der Anzahl der Kanten wird auch die Anzahl der Flächen um eins vermindert. Ecken verschwinden keine,

da die verschwundene Kante bei beiden Gebieten Teil der Grenze war, also Teil eines geschlossenen Kantenzug. Somit bleibt die obige Summe in der Tat unverändert.

Falls die Kante keine Flächen voneinander trennte, war sie nicht Teil eines geschlossenen Kantenzugs, also verschwindet keine Fläche. Allerdings muß die Kante dann eine Ecke haben, von der keine weitere Kante ausgeht, und diese Ecke verschwindet zusammen mit der Kante. Die andere bleibt, da wir stets von zusammenhängenden Kantenzügen ausgehen. Also haben wir eine Ecke und eine Kante weniger und wieder dieselbe alternierende Summe.

Diese alternierende Summe ist nach Induktionsannahme in beiden Fällen gleich zwei, womit der EULERsche Polyedersatz bewiesen wäre.

Diesen Satz wollen wir nun anwenden um uns Informationen über den zu färbenden Graphen zu verschaffen.

Die Anzahl e der Ecken ist hier natürlich die Anzahl der einzufärbenden Territorien, und falls das i-te dieser Territorien k_i Nachbarn hat, gibt es

$$k = \sum_{i=1}^{e} k_i$$

Kanten. Über die Anzahl f der Flächen können wir allerdings zumindest auf Anhieb nichts sagen.

Um trotzdem den EULERschen Polyedersatz anwenden zu können, greifen wir zu einem Trick, der in der Mathematik paradoxerweise erstaunlich oft zum Erfolg führt: Wir machen unser Problem schwerer.

Hier geschieht dies dadurch, daß wir zusätzliche Kanten in den Graph einfügen, mit anderen Worten, wir geben einigen Territorien Nachbarn, die sie in Wirklichkeit gar nicht haben. Dies geschieht dadurch, daß wir Ecken des Graphen solange durch neue Kanten mit anderen verbinden, wie dies möglich ist, ohne dabei bereits vorhandene Kanten zu überqueren. Anschaulich ist klar und mathematisch ist auch beweisbar, daß wir dies so lange tun können, bis jede der Flächen, in die der Graph die Ebene unterteilt, von nur noch drei Kanten begrenzt wird. Da

umgekehrt jede Kante zu genau zwei Flächen gehört, ist somit $3f = 2k$ oder $f = \frac{2}{3}k$. Nach dem EULERschen Polyedersatz ist also

$$e - k + f = e - \frac{k}{3} = 2 \quad \text{oder} \quad k = 3e - 6\,.$$

Im ursprünglichen Graph, bevor wir die zusätzlichen Kanten eingefügt haben, gab es eventuell weniger Kanten; für diesen gilt also nur

$$k \leq 3e - 6\,.$$

Sei nun n die Minimalzahl von Kanten, die von einer Ecke ausgehen. Da jede Kante genau zwei Ecken miteinander verbindet, ist dann

$$k \geq \frac{n}{2}e\,,$$

also ist

$$\frac{n}{2}e \leq k \leq 3e - 6 < 3e \quad \text{oder} \quad \frac{n}{2} < 3\,.$$

Somit ist n höchstens gleich fünf.

Damit wissen wir, daß es in jedem ebenen Graphen mindestens eine Ecke gibt, von der höchstens fünf Kanten ausgehen, und das reicht, um per Induktion zu beweisen, daß sechs Farben genügen:

Satz: Jede Karte kann mit sechs Farben so eingefärbt werden, daß keine zwei benachbarten Gebiete die gleiche Farbe haben.

Zum *Beweis* können wir natürlich das äquivalente Problem für Graphen betrachten; wir lösen es durch Induktion nach der Anzahl e der Ecken.

Falls es höchstens sechs Ecken gibt, können wir jeder davon ihre eigene Farbe geben und haben das Problem gelöst.

Andernfalls nehmen wir an, wir hätten das Problem bereits gelöst für Graphen mit $e-1$ Ecken und betrachten nun einen Graphen mit e Ecken.

Wie wir oben gesehen haben, gibt es unter diesen Ecken mindestens eine, von der höchstens fünf Kanten ausgehen. Wenn wir diese Ecke und ihre Kanten aus dem Graph entfernen, bleibt ein Teilgraph mit nur $e - 1$ Ecken übrig, den wir nach Induktionsannahme mit sechs Farben

so färben können, daß keine zwei Endpunkte einer Kante dieselbe Farbe haben.

Nachdem wir dies getan haben, setzen wir die herausgenommene Ecke samt ihrer Kanten wieder ein. Da höchstens fünf Kanten von ihr ausgehen, können die anderen Endpunkte dieser Kanten höchstens fünf verschiedene Farben haben, wir haben also noch mindestens eine Farbe übrig, um die Ecke so zu färben, daß sie eine andere Farbe hat als jeder ihrer Nachbarn. ∎

Bemerkung: Vor dem Hintergrund der Tatsache, daß tatsächlich sogar vier Farben ausreichen, erscheint dieser Satz sehr schwach. Die Beweismethodik reicht aber aus, um im Falle von Karten auf einer Fläche vom Geschlecht $g \geq 1$ die optimale Schranke zu finden: Wir können grundsätzlich genauso vorgehen, allerdings gilt der EULERsche Polyedersatz in der Form, die wir kennen, natürlich nur für Graphen auf der Kugel *bzw.* in der Ebene. Mit nur unwesentlich größerem Aufwand kann man jedoch eine Verallgemeinerung zeigen, die für Graphen auf Flächen eines beliebigen Geschlechts g gilt:

$$\#\,\text{Ecken} - \#\,\text{Kanten} + \#\,\text{Flächen} = 2 - 2g\,.$$

Damit bekommen wir, wenn wir wie oben vorgehen, die Abschätzung

$$k \leq 3e + 6g - 6$$

für die Anzahl k der Kanten und die Anzahl e der Ecken. Bezeichnen wir wieder mit n die kleinste Anzahl von Kanten, die von einer Ecke des Graphen ausgeht, so ist also hier

$$\frac{ne}{2} \leq 3e + 6g - 6 \quad \text{oder} \quad n \leq 6 + \frac{12g - 12}{e}\,.$$

Oben, im Falle $g = 0$, war der ganz rechts stehende Summand negativ und wir haben ihn einfach weggelassen und dabei aus dem Zeichen $\leq$ ein striktes Kleinerzeichen gemacht.

Für $g \geq 1$ ist $12g - 12 \geq 0$, hier können wir also nicht so vorgehen. Dafür wird jetzt eine andere Art der Abschätzung möglich: Da n die kleinste Anzahl von Kanten ist, die von einer Ecke ausgeht, gibt es mindestens eine Ecke, von der n Kanten ausgehen. Diese Kanten haben

zusammen $n+1$ Endpunkte, also ist $e \geq n+1$ und $\frac{1}{e} \leq \frac{1}{n+1}$. Wenn der Zähler $12g-12 \geq 0$ ist **und nur dann**, können wir also in obiger Formelzeile weiter abschätzen und erhalten

$$n \leq 6 + \frac{12g-12}{e} \leq n \leq 6 + \frac{12g-12}{n+1}\,.$$

Multiplikation mit dem Nenner $n+1$ macht daraus die Ungleichung

$$n(n+1) \leq 6(n+1) + 12g - 12 \quad \text{oder} \quad n^2 - 5n - 12g + 6 \leq 0\,.$$

Mittels quadratischer Ergänzung können wir dies umschreiben zu

$$\left(n - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} - 12g + 6 = \left(n - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 12g \leq 0\,,$$

d.h.

$$\left(n - \frac{5}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4} + 12g = \frac{1+48g}{4}\,.$$

Wir interessieren uns für eine *obere* Schranke für n; wenn wir daher auf beiden Seiten die Quadratwurzel ziehen, ist links nur die Wurzel $n - \frac{5}{2}$ interessant, und wir erhalten

$$n - \frac{5}{2} \leq \frac{\sqrt{1+48g}}{2} \quad \text{oder} \quad n \leq \frac{5+\sqrt{1+48g}}{2}\,.$$

Da n eine natürliche Zahl ist, können wir dies verschärfen zu

$$n \leq \left\lfloor \frac{5+\sqrt{1+48g}}{2} \right\rfloor\,.$$

Es gibt also in jedem Graphen auf einer Fläche vom Geschlecht $g \geq 1$ mindestens eine Ecke, die höchstens die rechts angegebene Anzahl von Nachbarn hat.

Wie oben läßt sich daraus schnell folgern, daß eine um eins höhere Anzahl von Farben stets ausreicht, um eine Karte so einzufärben, daß keine zwei benachbarten Länder die gleiche Farbe haben, d.h. auf einer Fläche vom Geschlecht $g \geq 1$ genügen

$$1 + \left\lfloor \frac{5+\sqrt{1+48g}}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{7+\sqrt{1+48g}}{2} \right\rfloor$$

Farben.

Diese Ungleichung bewies HEAWOOD bereits 1890; seit 1968 weiß man, daß sie die bestmögliche ist, d.h. es gibt Karten, für die man wirklich so viele Farben braucht. Interessanterweise war dies hier bei weitem der schwierigste Teil, wohingegen es im klassischen Fall, für $g = 0$, trivial ist, daß man mindestens vier Farben braucht: Hier bestand die große Schwierigkeiten darin, zu zeigen, daß man wirklich mit vier Farben *auskommt.*

§6: Fünf Farben reichen

Wir wollen uns zunächst überlegen, warum *fünf* Farben ausreichen:

Satz: Jede Karte kann mit fünf Farben so eingefärbt werden, daß keine zwei benachbarten Gebiete die gleiche Farbe haben.

Zum *Beweis* betrachten wie wieder das äquivalente Problem für Graphen und lösen es durch Induktion nach der Anzahl e der Ecken.

Falls es höchstens fünf Ecken gibt, können wir jeder davon ihre eigene Farbe geben und haben das Problem gelöst.

Andernfalls nehmen wir an, wir hätten das Problem bereits gelöst für Graphen mit $e-1$ Ecken und betrachten nun einen Graphen mit e Ecken.

Wie wir wissen, gibt es unter diesen Ecken mindestens eine, von der höchstens fünf Kanten ausgehen. Wenn wir diese Ecke E und ihre Kanten aus dem Graph entfernen, bleibt ein Teilgraph mit nur $e - 1$ Ecken übrig, den wir nach Induktionsannahme mit fünf Farben so färben können, daß keine zwei Endpunkte einer Kante dieselbe Farbe haben.

Nachdem wir dies getan haben, setzen wir die herausgenommene Ecke samt ihrer Kanten wieder ein. Falls ihre Nachbarpunkte höchstens vier verschiedene Farben haben, haben wir noch mindestens eine Farbe übrig für E und das Problem ist gelöst.

Bleibt der Fall, daß es genau fünf Nachbarecken gibt, von denen jede eine andere Farbe hat. In diesem Fall müssen wir im restlichen Graphen Farben ändern; die Methode dazu sind die sogenannten KEMPE-Ketten, mit denen KEMPE 1880 glaubte den Vierfarbensatz bewiesen zu haben.

Seien E_1, E_2, E_3, E_4 und E_5 die fünf Nachbarecken; da es auf die Namen der Farben nicht ankommt, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, daß ihre Farben, in dieser Reihenfolge, rot, gelb, grün, blau und schwarz seien.

Betrachten wir nun die Menge M aller Ecken, die von E_1 aus durch einen Kantenzug erreichbar sind, in dem alle Ecken rot oder grün gefärbt sind. Diese Menge kann, muß aber nicht, die grüne Nachbarecke E_3 von E enthalten.

Falls E_3 nicht in M liegt, vertauschen wir für die Ecken aus M die Farben, d.h., die Ecken, die bislang rot waren, werden grün, und die grünen werden rot. Auch mit dieser Färbung hat keine Ecke eine Nachbarecke gleicher Farbe, denn für $P \in M$ ist auch jede rote oder grüne Nachbarecke von P in M, und da *jede* Ecke in M ihre Farbe gewechselt hat, kann es dort keine benachbarte Ecken gleicher Farbe geben. Mit den Nachbarecken von P, die *nicht* in M liegen, gibt es erst recht keine Probleme, denn diese sind gelb, blau oder schwarz, während P rot oder grün ist.

Durch das Umfärben wechselte insbesondere E_1 seine Farbe von rot zu grün, während E_3, da es nicht in M liegt, grün blieb. Somit hat E nun zwei grüne, dafür aber keinen roten Nachbarn mehr. Wir können E somit rot färben und sind fertig.

Falls E_3 in M liegt, können wir nicht so vorgehen: Zwar können wir auch dann die Farben aller Ecken aus M ändern, aber das hat dann nur zur Folge, daß E_1 grün und E_3 rot wird, es gibt also weiterhin fünf verschiedenfarbige Nachbarn.

In diesem Fall betrachten wir die Menge N aller Ecken, die von E_2 aus durch einen gelb-blauen Kantenzug erreichbar sind. Wegen $E_3 \in M$ gibt es einen rot-grünen Kantenzug, der E_1 mit E_3 verbindet; zusammen mit dem Kantenzug von E_3 über E_2 nach E_1 bildet dieser eine geschlossene Kurve.

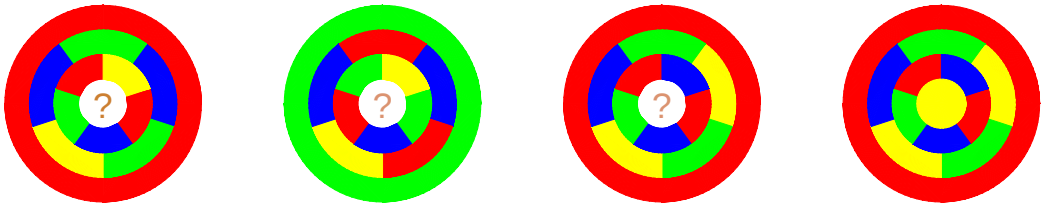
Innerhalb dieser geschlossenen Kurve muß N liegen, denn zwei Kantenzüge eines Graphen können sich höchstens ein einer Ecke schneiden, und keine Ecke kann gleichzeitig rot oder grün und blau oder gelb sein.

Damit folgt insbesondere, daß E_4 *nicht* in N liegen kann, denn E_4 liegt nicht innerhalb dieser geschlossenen Kurve.

Wenn wir also in N alle bislang blauen Ecken gelb färben und alle bislang gelben blau, wird E_2 blau und E_4 bleibt blau; wir können daher E gelb färben und haben das Problem damit auch in diesem letzten Fall gelöst.

■

KEMPE hatte durch ein etwas komplizierteres Argument mit seinen Ketten versucht, auch den Vierfarbensatz zu beweisen; leider konnte aber HEAWOOD durch ein explizites Gegenbeispiel zeigen, daß dieses Argument nicht immer richtig ist. Trotzdem sind KEMPE-Ketten auch für die Vierfärbung von Karten oft nützlich. Als ein Beispiel können wir auf dem die Reihe der unten abgedruckten Karten betrachten. Links haben wir eine Karte, bei der wir nur noch das Zentrum färben müssen. Da es Nachbarn mit vier verschiedenen Farben hat, ist das ohne Umfärben eines Teils der äußeren Gebiete nicht möglich.



Die roten und grünen Gebiete der linken Karte bilden eine einzige KEMPE-Kette; jedes Vertauschen von Rot und Grün in nur einem Gebiet führt also dazu, daß überall Rot und Grün vertauscht werden, und das führt zur zweiten Karte der Reihe, mit der wir genauso wenig anfangen können wie mit der ersten.

Betrachten wir allerdings die gelben und blauen Gebiete, so haben wir zwei disjunkte KEMPE-Ketten, von denen wir auf der einen die Farben vertauschen können. Falls wir etwa die nehmen, die nur aus den beiden Gebieten rechts des Zentrums besteht, kommen wir durch Umfärben zur dritten Karte der Reihe, in der das Zentrum nur noch rote, grüne und blaue Nachbarn hat. Somit können wir es gelb färben und erhalten rechts in der Reihe die gesuchte Vierfärbung der Karte.

§7: Wie wurde der Vierfarbensatz bewiesen?

Allgemein führt diese Strategie, wie gesagt, nicht zum Erfolg; für den Beweis des Vierfarbensatzes war also eine neue Idee notwendig.

Die Idee, die schließlich zu einem Beweis führte, bestand darin, zwar weiterhin rekursiv zu arbeiten, im Induktionsschritt aber nicht nur einen Punkt einschließlich seiner Verbindungskanten herauszunehmen, sondern eine größere Teilkonfiguration. Man arbeitet dabei stets mit dem Graphen, in den so lange Kanten eingefügt wurden, bis alle Flächen von nur drei Kanten begrenzt sind.

Um die Beweislogik etwas übersichtlicher zu machen, formulieren wir die Beweisstrategie etwas um:

Angenommen, es gäbe eine Karte, die nicht mit vier Farben so eingefärbt werden kann, daß benachbarte Gebiete verschiedene Farben haben. Dann gibt es, wie wir oben gesehen haben, auch entsprechende Karten, bei denen in den daraus konstruierten ebenen Graphen alle Flächen Dreiecke sind, und natürlich gibt es unter diesen Karten auch minimale, das heißt solche mit der geringstmöglichen Anzahl von Gebieten. Wir betrachten im folgenden ein solches minimales Gegenbeispiel.

Der Beweis des Vierfarbensatzes ruht auf zwei großen Säulen:

1. Reduzibilität: Finde eine große Anzahl von Konfigurationen mit der Eigenschaft, daß kein minimales Gegenbeispiel eine solche Konfiguration enthalten kann. Solche Konfigurationen heißen *reduzibel;* Unterbegriffe wie D-Reduzibilität und C-Reduzibilität beziehen sich auf Beweisstrategien, mit denen man gewisse Klassen von Konfigurationen als reduzibel erkennen kann.

Besonders wichtig für den endgültigen Beweis war HEESCHS D-Reduzibilität, die ein Computer durch stures Nachrechnen erkennen kann.

Beim Beweis des Sechsfarbensatzes wären solche Konfigurationen etwa die Punkte mit höchstens fünf Nachbarn. Wenn wir einen solchen Punkt aus dem Graphen herausnehmen, können wir den Rest färben wie wir wollen, es bleibt immer mindestens eine zulässige Farbe für den herausgenommenen Punkt übrig.

Ähnlich ist es bei D-reduziblen Konfigurationen im Beweis des Vierfarbensatzes: Sie haben die Eigenschaft, daß man den Restgraphen, der nach ihrer Herausnahme entsteht, (zulässig) färben kann, wie man will; die Färbung läßt sich auf jeden Fall zu einer Färbung des gesamten Graphen fortsetzen.

Der Beweis, daß eine vorgegebene Konfiguration D-reduzibel ist, erfolgt durch stures Nachrechnen und ist daher sehr gut an Computer delegierbar. Auch dort gibt es allerdings Probleme:

Falls die betrachtete Konfiguration im Graphen n Nachbarpunkte hat, muß man alle Möglichkeiten für deren Färbung einzeln betrachten. Falls die Nachbarpunkte einen Ring aus n Punkten bilden, gibt es dafür $28 \cdot 3^{n-3}$ Möglichkeiten. Diese sind zwar nicht alle wesentlich verschieden, denn Konfigurationen, die aus bereits behandelten nur durch Permutation der Farben entstehen, müssen nicht noch einmal gesondert untersucht werden. Dies reduziert die Arbeit aber lediglich um knapp einen Faktor 24 und ändert nichts daran, daß ein Randpunkt mehr zu einer Verdreifachung der Möglichkeiten führt. Damit ist klar, daß Konfigurationen mit zu vielen Randpunkten vermieden werden sollten: Zu der Zeit, als HEESCH mit der Untersuchung D-reduzibler Konfigurationen begann und sein Schüler DÜRRE Konfigurationen per Computer auf D-Reduzibilität testete, brauchte der Computer beispielsweise für eine einzige (ziemlich schwierige) Konfiguration mit 14 Randpunkten 26 Stunden Rechenzeit. Da HEESCH ursprünglich schätzte, daß zum Beweis des Vierfarbensatzes etwa 10 000 Konfigurationen untersucht werden müßten, war klar, daß auch ein Beweis per Computer alles andere als einfach sein würde.

2. Unvermeidbarkeit: Hier geht es darum, eine Liste von Konfigurationen zu finden derart, daß jedes minimale Gegenbeispiel zum Vierfarbensatz mindestens eine dieser Konfigurationen als Teilgraph enthalten muß und zu zeigen, daß jede dieser Konfigurationen reduzibel ist. Falls dies gelingt, ist der Vierfarbensatz bewiesen:

Angenommen, er wäre falsch. Dann gäbe es ein minimales Gegenbeispiel im obigen Sinne. Diese müßte eine unvermeidbare Konfiguration enthalten, könnte aber keine reduzible Konfiguration enthalten.

Falls jede unvermeidbare Konfiguration reduzibel ist, kann das aber offensichtlich nicht sein; also gibt es kein minimales Gegenbeispiel und somit überhaupt keines.

Beim Beweis des Fünf- und des Sechsfarbensatzes lieferte uns der EULERsche Polyedersatz die unvermeidbaren Konfigurationen: Es waren einfach Punkte mit höchstens fünf Nachbarn. Im Falle des Sechsfarbensatzes haben diese Punkte trivialerweise eine analoge Eigenschaft zur D-Reduzibilität: Egal, wie die Nachbarpunkte eingefärbt sind, bleibt immer mindestens eine Farbe übrig für den Punkt selbst. Beim Fünffarbensatz gilt dies für einen Punkt mit fünf Nachbarn nicht mehr; hier muß zusätzlich via KEMPE-Ketten ein Teil des Restgraphen umgefärbt werden. Dies ist ein Spezialfall der C-Reduzibilität, auf die hier jedoch nicht genauer eingegangen werden soll.

Die Suche nach unvermeidbaren Konfigurationen geht auch bei HEESCHs Strategie aus vom EULERschen Polyedersatz: Jede Ecke des Graphen erhält eine „Ladung“, die anfänglich gleich sechs minus der Anzahl der Nachbarecken ist. Wie die Rechnung, die zum Beweis des Sechsfarbensatzes führte, zeigt, ist dann die Summe aller Ladungen gleich zwölf, also insbesondere positiv.

Für Fünf- und Sechsfarbensatz reicht es, als unvermeidbare Konfigurationen die Punkte mit positiver Ladung zu nehmen; für den Vierfarbensatz muß die Ladung zunächst weiter auf dem Graphen verteilt werden ohne an der Summe etwas zu ändern. Dazu dienen sogenannte Entladungsprozeduren mit Regeln der Art:

Falls eine Ecke E mit fünf Nachbarn unter diesen Nachbarn welche mit mindestens sieben Nachbarn hat, erhält jeder dieser Nachbarn von E die Ladung $\frac{1}{2}$.

Danach ist beispielsweise eine Ecke mit fünf Nachbarn nicht mehr positiv geladen, wenn zwei oder mehr ihrer Nachbarn ihrerseits mindestens sieben Nachbarn haben; dagegen werden Ecken mit $k \geq 7$ Nachbarn positiv geladen, falls unter diesen Nachbarn mehr als $2k - 12$ ihrerseits nur fünf Nachbarn haben. (Da die Anzahl dieser Nachbarn natürlich nicht größer als k sein kann, ist dies nur für $7 \leq k \leq 11$ möglich.)

Hat man durch eine Entladungsprozedur die Ladungen neu verteilt, ist wegen der unverändert gebliebenen Ladungssumme klar, daß es stets Ecken mit positiver Ladung geben muß. Der nächste Schritt besteht nun darin, eine Liste von Konfigurationen aufzustellen derart, daß jeder Graph, der eine der positiv geladenen Ecken enthält, auch eine Konfiguration aus der Liste enthalten muß; man konstruiert sich die Konfigurationen also um die positiv geladenen Ecken herum. Das Ergebnis ist eine Liste unvermeidbarer Konfigurationen, die natürlich stark von der gewählten Entladungsprozedur abhängt.

Das große Problem und die Kunst besteht nun darin, die Entladungsprozedur so zu wählen, daß die Liste unvermeidbarer Konfigurationen nur reduzible Konfigurationen enthält. Dies haben APPEL und HAKEN schließlich geschafft mit einer Liste von 1818 unvermeidbaren Konfigurationen (von der sich später herausstellte, daß bereits eine Teilliste von nur 1476 Konfigurationen unvermeidbar ist.) Diese Liste wurde trotz vieler Computerexperimente per Hand aufgestellt, und auch ihre Unvermeidbarkeit wurde ohne Computerhilfe bewiesen. Die Reduzibilität der Listenelemente allerdings konnte nur per Computer nachgewiesen werden; dies war im wesentlichen das Werk des damaligen Studenten JOHN KOCH (*1948), der damit 1976 promovierte und sich dazu eine ganzen Reihe von Optimierungen der Beweisstrategie einfallen lassen mußte.

§8: Ist der Vierfarbensatz damit bewiesen?

Nachdem im vorigen Abschnitt der Beweis von APPEL und HAKEN skizziert wurde, mag diese Frage seltsam erscheinen; angesichts der Tatsache, daß hier erstmalig ein wesentlicher Teil des Arguments nur auf Computerrechnungen beruht, sollten wir uns aber doch fragen, was wir uns unter einem mathematischen Beweis vorstellen wollen.

Das Konzept eines mathematischen Beweises kam aus der griechischen Geometrie. Diese ging bekanntlich aus von als unmittelbar einsichtig angesehenen Axiomen und Postulaten und leitete daraus ihre Sätze ab. Mit dem Aufkommen einer leistungsfähigen formalen Logik gegen Ende des 19. Jahrhunderts konnte man diesen Begriff der Ableitung

präzisieren und es stellte sich heraus, daß tatsächlich außer den EUKLIDischen Axiomen noch weitere notwendig sind (DAVID HILBERT stellte 1899 ein entsprechendes System auf), aber für die Herleitung und das Verständnis mathematischer Sätze hatte dies keine allzu große Bedeutung: Das Wissen der Mathematik vermehrt sich kumulativ, so daß Mathematiker meist eher auf den Resultaten anderer Mathematiker aufbauen als daß sie direkt mit den Axiomen einer Theorie zu tun haben. Zwar sind sie davon überzeugt, daß sich ihre Sätze letztlich in kleinen Schritten aus den Axiomen ableiten lassen, aber sie schreiben ihre Resultate aus gutem Grund nie so auf:

Mathematik ist zwar eine formale Wissenschaft in dem Sinne, daß sie formale Methoden benutzt; jedoch sind diese Methoden nur ein Hilfsmittel, um interessante Probleme zu lösen. Es ist sehr einfach, aus einem Axiomensystem durch Anwendung von Ableitungsregeln neue korrekte Formeln abzuleiten, aber selbst wenn diese wider Erwarten interessant sein sollten, ist eine solche Herleitung nicht das, was sich ein Mathematiker unter einem Beweis vorstellt: Er möchte über das rein Formale hinaus einen *Grund* sehen, warum ein Satz richtig ist. Ein guter Beweis muß daher so strukturiert sein, daß die dahinter stehenden Ideen klar erkennbar werden.

Natürlich muß auch klar werden, wie sich diese Ideen in einen formalen Beweis übersetzen lassen, aber da eine solche Übersetzung zur mathematischen Routine gehört, wird dies, je nach intendiertem Leserkreis, nur mehr oder weniger kurz angedeutet. Von Studienanfängern zu Beginn des ersten Semesters erwartet man noch, daß sie zumindest einige einfache Formeln sehr detailliert beweisen, danach gehört es zum Prozeß des mathematischen Erwachsenwerdens, daß mit zunehmender Erfahrung immer komplexere Schritte „klar“ sein sollten und weggelassen werden können. Wer mathematische Arbeiten in anerkannten Fachzeitschriften publizieren oder auch nur lesen möchte, muß diesen Prozeß beendet haben: Solche Arbeiten sind fast immer sehr knapp geschrieben. Das liegt nicht nur daran, daß die Herausgeber mit dem Platz geizen müssen: In den meisten Teilgebieten der Mathematik ist es schon seit langem schlichtweg unmöglich, einen interessanten Satz zu beweisen, ohne ganz wesentlich auf der Arbeit anderer Mathemati-

ker aufzubauen. Schon SIR ISSAC NEWTON (1642 - 1727) schrieb am 5. Februar 1675 etwas boshaft an den (ziemlich kleinwüchsigen) ROBERT HOOKE (1635-1702), der sich beklagte, daß NEWTON seine Ideen über das Licht in den *Principia Mathematica* benutzt habe:

If I have seen further, it is by standing on the shoulders of giants.

Daß dies bei weitem nicht nur in der Mathematik und Physik so ist, sondern allgemein bei jedem Streben nach Erkenntnis, ließ schon vor knapp zwei Tausend Jahren MARCUS ANNAEUS LUCANUS (39-65) in seinem Epos *Pharsalia* über den römischen Bürgerkrieg den DIDACUS STELLA sagen: *Pigmaei gigantum humeris impositi plusquam ipsi gigantes vident.* (Pygmäen, die auf den Schultern von Riesen stehen, sehen mehr als die Riesen selbst.)

Wie ordnet sich nun der Beweis von APPEL und HAKEN in dieses Selbstverständnis der Mathematik ein?

Auch der schärfste Kritiker von Computerbeweisen kann nicht leugnen, daß dieser Beweis sehr wesentliche mathematische Ideen enthält, nicht nur von APPEL und HAKEN selbst, sondern auch von vielen ihrer Vorgänger wie KEMPE, HEAWOOD, BIRKHOFF, HEESCH und vielen anderen. Der Beweis wäre nie zustande gekommen, wenn sich die Autoren darauf beschränkt hätten, einfach einen Computer drauf los rechnen zu lassen.

Trotzdem unterscheidet sich der Beweis in beiden seiner Säulen vom Idealbild eines mathematischen Beweises:

Am deutlichsten wird dies bei den Reduzibilitätsbeweisen per Computer: Normalerweise ist es die Aufgabe eines mathematischen Beweises, auf dem entsprechenden Gebiet hinreichend kompetente weitere Mathematiker von der Richtigkeit des bewiesenen Satzes zu überzeugen: Ein entsprechender Leser sollte, nachdem er den Beweis verstanden hat, idealerweise in der Lage sein, an jeder beliebigen Stelle des Beweises Details einzufügen, um den Beweis oder Teile davon (beispielsweise für die Ausbildung von Mathematikstudenten oder einen Übersichtsartikel für Nichtspezialisten) auch Zuhörern oder Lesern eines niedrigeren Kompetenzniveaus klar zu machen. Dies ist bei einem Computerbeweis kaum

möglich: Schon für eine einzige Konfiguration mit 14 Nachbarpunkten kann kein menschlicher Leser mehr überprüfen, daß sich wirklich alle Färbungen des äußeren Rings ins Innere fortsetzen lassen.

Man könnte nun einwenden, daß es genüge, wenn ein hinreichend kompetenter Leser wenigstens das Programm verstehen könne, das die Überprüfung vornimmt, aber leider ist selbst das im Allgemeinen (und insbesondere speziell bei diesem Beweis) zuviel verlangt: Aus Effizienzgründen mußte KOCH seine Programme in Assembler schreiben, und selbst wenn es heute noch Mathematiker gibt, die die Assemblersprache der IBM 360 und 370 Serie beherrschen, sind bis zum letzten durchoptimierte Assemblerprogramme so schwer zu lesen, daß auch sie kaum eine Chance haben.

In der Tat versuchte 1996 eine Gruppe von Mathematikern (N. ROBERTSON, D. P. SANDERS, P. D. SEYMOUR und R. THOMAS), den Computerbeweis nachzuvollziehen und entschloß sich ziemlich schnell, lieber ganz von vorn anzufangen und mit neuen Entladungsprozeduren und neuen Programmen zur Reduzibilität einen neuen Beweis zu konstruieren – was Ihnen auch gelang. Ein Mathematiker, der ihren Beweis nachvollziehen möchte, sieht sich wahrscheinlich vor dasselbe Problem gestellt und wird es ebenfalls einfacher finden, von vorn anzufangen statt den Beweis zu lesen. Was soll man von solchen Beweisen halten, die (außer hoffentlich den Autoren) niemand nachvollziehen kann?

Hinzu kommt, daß auch Computer alles andere als unfehlbar sind: Softwarefehler gab es auch schon vor Microsoft, und Hardwarefehler sind zwar deutlich seltener, kommen aber durchaus vor.

Auch die zweite Säule des Beweises, die computerunabhängige Konstruktion einer Liste unvermeidbarer Konfigurationen, entspricht nicht dem Idealbild eines mathematischen Beweises: Wer kann sicher sein, daß ein Autor bei der Betrachtung von 1818 Fällen, die (einschließlich der Zeichnungen, die in der Originalveröffentlichung zunächst nur auf Microfiche beilagen) rund 400 Druckseiten einnehmen, wirklich keinen Fehler gemacht hat?

Natürlich haben die Autoren (zum Teil mit Hilfe ihrer Familien) alle Details noch einmal überprüft und auch eine Routine zur Fehlerbehe-

bung entwickelt, die auch bei den nach der Veröffentlichung gefundenen Fehlern bisher noch nie versagt hat, aber warum das immer funktionieren *muß,* versteht kein Mathematiker wirklich. Den meisten Mathematikern wäre daher nicht nur des Computers wegen ein „klassischer" Beweis des Vierfarbensatzes lieber.

Angesichts der Berühmtheit des Vierfarbenproblems gab es in den letzten hundert Jahren immer wieder solche „Beweise", meist von Autoren, die mangels Verständnis und/oder Erfahrung sehr viel elementarere Fehler machten als seinerzeit KEMPE.

Derzeit zirkuliert wieder ein computerfreier nur vierzehnseitiger Beweis des Vierfarbensatzes, diesmal allerdings geschrieben von einem Autor, der bereits eine ganze Reihe von graphentheoretischen Arbeiten in mathematischen Fachzeitschriften veröffentlicht hat:

I. CAHIT: Spiral Chains: A New Proof Of The Four Color Theorem *(18. Aug 2004),* `http://arxiv.org/abs/math.CO/0408247/`

Üblicherweise dauert es mehrere Monate, im Extremfall sogar Jahre, bis eine bei einer mathematischen Fachzeitschrift eingereichte Arbeit von einem (oder mehreren) Gutachtern überprüft und dann zur Veröffentlichung akzeptiert werden; es ist also noch zu früh, um über die Korrektheit dieses Beweises zu spekulieren oder – im Falle, daß er wie der ursprüngliche WILESsche Beweis der FERMAT-Vermutung Fehler oder Lücken enthält – die Behebbarkeit eventueller Fehler.

§9: Literaturhinweise zum Vierfarbenproblem

Eine im großen und ganzen recht elementare Einführung in den Problemkreis geben die beiden Bücher

RUDOLF und GERDA FRITSCH: Der Vierfarbensatz. Geschichte, Topologische Grundlagen und Beweisidee, *Bibliographisches Institut Mannheim,* 1994 und

T.L. SAATY, P.C. KAINEN: The Four-Color Probem: Assaults and Conquest, *McGraw Hill, New York,* 1977; Nachdruck bei *Dover,* 1986

Den vollständigen Beweis zusammen mit einer auch für Nichtexperten gut lesbaren Einleitung findet man in

K. APPEL und W. HAKEN: Every planar map is four-colorable, Band **98** der Reihe *Contemporary Mathematics, American Mathematical Society, Providence RI,* 1989

Eine allgemeinverständliche Einführung zum neuen Beweis (mit Referenzen) bietet

N. ROBERTSON, D.P. SANDERS, P.D. SEYMOUR, R. THOMAS: The Four-Color Theorem,
`http://www.math.gatech.edu/~thomas/FC/fourcolor.html`

Auch die Biographie (stellenweise eher Hagiographie)

HANS-JÜRGEN BIGALKE: Heinrich Heesch. Kristallgeometrie, Parkettierungen, Vierfarbenforschung, *Band 3 der Reihe Vita Mathematica, Birkhäuser, Basel, Boston, Stuttgart,* 1988

enthält eine Darstellung der Grundideen des Beweises, die sich speziell an Nichtmathematiker wendet. In erster Linie mit philosophischen und wissenschaftstheoretischen Konsequenzen beschäftigen sich

DONALD MACKENZIE: Slaying the Kraken: The Sociohistory of a Mathematical Proof, *Social Studies in Science* **29** (1999), S. 7–60 und

THOMAS TYMOCZKO: The Four-Color Problem and Its Philosophical Significance, *in:* THOMAS TYMOCZKO [HRSG]: New Directions in the Philosophy of Mathematics, *Birkäuser, Boston, Basel, Stuttgart,* 1994

Beide stellen auch wesentliche Ideen des Beweises für ihre Leserschaft aus u.a. Soziologen und Philosophen vor, MACKENZIE mit erheblich mehr Details als TYMOCZKO. Ansonsten geht es bei MACKENZIE eher darum, wie die wissenschaftliche Gemeinschaft auf den Beweis reagierte, bei TYMOCZKO dagegen eher um grundsätzliche Überlegungen aus philosophischer Sicht.

Kapitel 5
Simpliziale Komplexe

In diesem Kapitel geht es darum, topologische Räume aus einfachen Bausteinen zusammenzusetzen; im nächsten Kapitel werden wir dann den so konstruierten Räumen Gruppen und Zahlen zuordnen, von denen wir sehen werden, daß sie nur vom Homöomorphietyp des Raums abhängen.

Unsere Bausteine sind (offene) Simplizes:

Definition: *a)* $k+1$ Punkte $P_0, \ldots, P_k$ aus $\mathbb{R}^n$ sind *in allgemeiner Lage*, wenn die Vektoren $P_0\vec{P}_1, \ldots, P_0\vec{P}_k$ linear unabhängig sind.
b) Sind $P_0, \ldots, P_k \in \mathbb{R}^n$ Punkte in allgemeiner Lage, so ist

$$s = \left\{ \sum_{i=0}^{k} \lambda_i P_i \;\middle|\; \lambda_i > 0, \;\; \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1 \right\}$$

das von $P_0, \ldots, P_k$ aufgespannte (offene) k*-Simplex*. Die Punkte P_i bezeichnen wir als die *Ecken* von s.
c) Die *Randsimplizes* von s sind jene Simplizes, die von Teilmengen von $\{P_0, \ldots, P_k\}$ aufgespannt werden.
d) Das von $P_0, \ldots, P_k$ aufgespannte *abgeschlossene* k*-Simplex* ist

$$\bar{s} = \left\{ \sum_{i=0}^{k} \lambda_i P_i \;\middle|\; \lambda_i \geq 0, \;\; \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1 \right\}$$

.

Offensichtlich sind zwei Punkte genau dann in allgemeiner Lage, wenn sie verschieden sind, drei Punkte sind genau dann in allgemeiner Lage, wenn sie nicht auf einer Geraden liegen, vier Punkte genau dann, wenn

sie nicht in einer Ebenen liegen, und so weiter. Ein 1-Simplex ist eine Strecke, ein 2-Simplex ein Dreieck und ein 3-Simplex ein Tetraeder. Das von k + 1 Punkten $P_0, \ldots, P_k$ aufgespannte abgeschlossene Simplex ist die disjunkte Vereinigung des von diesen Punkten aufgespannten Simplex zusammen mit dessen sämtlichen Randsimplizes.

Definition: *a)* Ein (endlicher) geometrischer simplizialer Komplex K ist eine endliche Menge von Simplizes aus einem festen $\mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften:

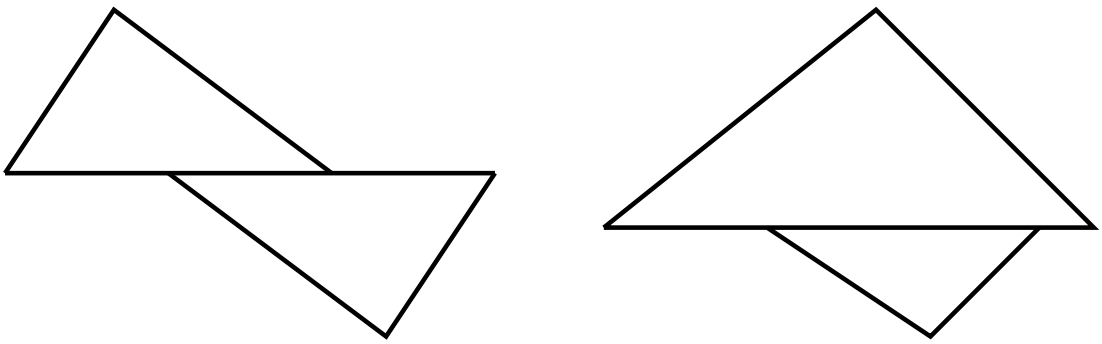
1. Für jedes Simplex $s \in K$ liegen auch die sämtlichen Randsimplizes von s in K.
2. Zwei verschiedene Simplizes aus K haben leeren Durchschnitt.

b) Der topologische Raum von K ist

$$|K| = \bigcup_{s \in K} s \subset \mathbb{R}^n$$

mit der Spurtopologie als Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

Die zweite Bedingung an einen Komplex besagt anschaulich interpretiert, daß wir Simplizes nur entlang gemeinsamer Randsimplizes aneinander setzen dürfen; Komplexe wie die unten eingezeichneten sind also nicht zulässig.



Die Topologie beschränkt sich keinesfalls nur auf endliche simpliziale Komplexe; da wir aber keine unendlichen Komplexe brauchen, soll hier die Endlichkeit stets vorausgesetzt werden. Da ein simplizialer Komplex mit jedem seiner Simplizes auch dessen sämtliche Randsimplizes

enthält, enthält er auch dessen Abschluß; $|K|$ ist daher auch die Vereinigung aller $\bar{s}$ mit $s \in K$. Da abgeschlossene Simplizes kompakt sind, folgt aus der vorausgesetzten Endlichkeit von K daher insbesondere, daß $|K|$ stets eine kompakte Menge ist.

Definition: Ein kompakter topologischer Raum X heißt *triangulierbar*, wenn es einen simplizialen Komplex K und einen Homöomorphismus $f\colon |K| \to X$ gibt.

Somit ist beispielsweise die n-dimensionale *Vollkugel*

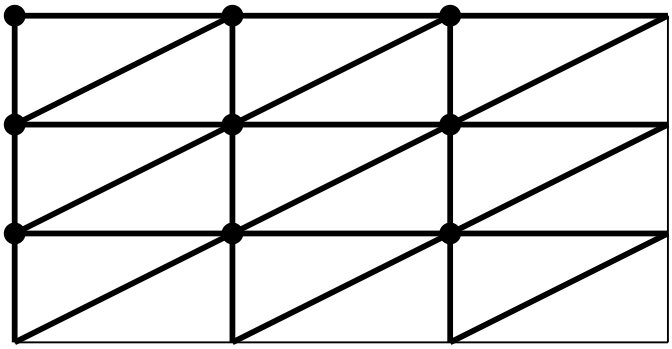
$$B^n = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1\right\}$$

triangulierbar, denn sie ist homöomorph zu einem abgeschlossenen n-Simplex, und dieses wiederum gehört zu jenem Komplex K, der aus dem zugehörigen offenen n-Simplex und dessen sämtlichen Randsimplizes besteht. Auch der Rand von B^n, die $(n-1)$-*Sphäre*

$$S^{n-1} = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1\right\}$$

ist triangulierbar; hierzu müssen wir einfach das einzige n-Simplex aus dem Komplex K herausnehmen.

Auch der Torus ist triangulierbar: Wir konstruieren ihn aus einem Rechteck, bei dem gegenüberliegende Seiten identifiziert werden. Zur Zerlegung in Dreiecke reicht es nun aber nicht, das Rechteck einfach in zwei Dreiecke zu zerlegen: Durch die Identifikation gegenüberliegender Seiten werden schließlich alle vier Eckpunkte des Rechtecks zu einem einzigen Punkt des Torus, die beiden „Dreiecke“ haben also auf dem Torus nur noch eine einzige Ecke, die zudem noch beiden gemeinsam ist. Es reicht auch nicht, wenn wir jede Kante des Rechtecks in der Mitte unterteilen: Ist etwa AB die obere Kante und M deren Mittelpunkt, so haben nach der Identifikation von A mit B die beiden Kanten AM und MB auf dem Torus beide die gleichen Endpunkte, wir hätten also für zwei Ecken gleich zwei Kanten, die diese verbinden. Um dies zu vermeiden, müssen wir jede Kante mindestens in drei Teilstücke zerlegen, das Rechteck also in neun Teilrechtecke. Diese können wir dann durch



eine Diagonale in jeweils zwei Dreiecke zerlegen und erhalten so einen simplizialen Komplex aus 18 Dreiecken.

Beim Zählen der Kanten müssen wir auf Identifizierungen achten: Von den vier senkrechten Strichen, die jeweils dreifach unterteilt werden, sind der erste und der letzte auf dem Torus identisch, als gibt es dort nur $3 \times 3 = 9$ Kanten, die senkrechten strichen im Rechteck entsprechen. genauso gibt es auch nur neun Kanten zu waagrechten Strichen und zusätzlich noch die neun Diagonalen. Insgesamt haben wir somit 27 Kanten, die wir zum Beispiel durch die im Bild etwas dicker eingezeichneten Kanten im Rechteck repräsentieren können.

Bleiben noch die Ecken. Da Oberkante und Unterkante sowie linke und rechte Kante des Rechtecks identifiziert werden, dürfen wir jeweils nur eine davon zählen und kommen so auf neun Ecken; auch hier sind Repräsentanten fett markiert. Für diese Triangulierung ist somit

$$\#\,\text{Ecken} - \#\,\text{Kanten} + \#\,\text{Flächen} = 9 - 27 + 18 = 0\,;$$

hier gilt also der EULERsche Polyedersatz nicht. Wir werden allerdings im nächsten Kapitel sehen, daß für jede Triangulierung des Torus die obige alternierende Summe verschwindet, so daß wir auch hier eine Gesetzmäßigkeit haben.

Da je zwei n-Simplizes homöomorph sind, ist es für die Topologie eines simplizialen Komplexes irrelevant, wo seine Ecken im $\mathbb{R}^n$ liegen; wir müssen nur sicherstellen, daß sich keine zwei Simplizes schneiden. Dies kann im Einzelfall durchaus schwierig sein; deshalb wollen wir simpliziale Komplexe auch abstrakt ohne Bezug zu einem $\mathbb{R}^n$ definieren. Auch hier beschränken wir uns wieder auf endliche Komplexe:

Definition: Ein *abstrakter simplizialer Komplex* ist ein Paar $\mathfrak{K} = (E, S)$ aus einer endlichen Menge E, deren Elemente als *Ecken* bezeichnet werden, sowie einer Menge $S \subseteq \mathfrak{P}(E)$ von nichtleeren Teilmengen von E, die mit einer Menge $\sigma \in S$ auch jede nichtleere Teilmenge von σ enthält. Eine $(q+1)$-elementige Menge $\sigma \in S$ wird als *abstraktes q-Simplex* bezeichnet.

Natürlich können wir jedem geometrischen simplizialen Komplex K einen abstrakten simplizialen Komplex zuordnen: Wir nehmen die Menge E aller Ecken von K und ordnen jedem Simplex von K als abstraktes Simplex die Menge seiner Ecken zu.

Weniger offensichtlich ist, daß wir auch jedem abstrakten simplizialen Komplex $\mathfrak{K}$ einen geometrischen zuordnen können: Dazu sei n die Anzahl der Ecken von $\mathfrak{K}$. Wir wählen im $\mathbb{R}^n$ irgendwelche n Punkte mit linear unabhängigen Ortsvektoren und ordnen jeder Ecke einen dieser Punkte zu. Wegen der linearen Unabhängigkeit der Ortsvektoren ist jede Teilmenge dieser Punktmenge in allgemeiner Lage; falls die Teilmenge zur Eckenmenge eines Simplex aus $\mathfrak{K}$ gehört, spannen die entsprechenden Punkte daher ein Simplex der richtigen Dimension auf, das wir in den Komplex K aufnehmen. Ebenfalls wegen der linearen Unabhängigkeit können zwei verschiedene solche (offene) Simplizes auch keine Punkte gemeinsamen haben; zwei abgeschlossene Simplizes schneiden sich also höchstens in einem gemeinsamen Randsimplex. Auf diese Weise können wir jedes abstrakte Simplex aus $\mathfrak{K}$ als geometrisches Simplex in $\mathbb{R}^n$ realisieren und erhalten einen geometrischen simplizialen Komplex K. (Im allgemeinen wird es natürlich geometrische Realisierungen auch schon in Räumen mit erheblich niedrigerer Dimension geben; in der Tat kann man mit etwas mehr Aufwand zeigen, daß ein abstrakter simplizialer Komplex, der kein q-Simplex mit $q > n$ enthält, durch einen geometrischen simplizialen Komplex in $\mathbb{R}^{2n+1}$ realisiert werden kann. Da uns topologische Räume in erster Linie *unabhängig* von einer Einbettung in einen umgebenden Raum interessierten, lohnt sich der Aufwand für diesen umfangreicheren Beweis jedoch nicht.)

Kapitel 6
Die Homologie simplizialer Komplexe

In diesem Abschnitt wollen wir einem simplizialen Komplex abelsche Gruppen und damit auch Zahlen zuordnen, die uns Informationen über die Geometrie des Komplexes geben. Wie wir am Ende sehen werden, hängen diese Daten nicht vom simplizialen Komplex ab, sondern nur von dessen topologischer Realisierung; sie geben also echte geometrische Information.

Beginnen wir mit einigen Aussagen über abelsche Gruppen. Eine abelsche Gruppe ist bekanntlich eine Gruppe, deren Gruppenoperation kommutativ ist; wir beschreiben diese Operation durch das Zeichen „+“ und nennen das neutrale Element Null. Auf einer abelschen Gruppe A gibt es eine natürliche Operation des Rings $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen: Für $\lambda \in \mathbb{Z}$ und $a \in A$ setzen wir

$$\lambda a = \begin{cases} a + \cdots + a \text{ (}\lambda \textit{ Faktoren)} & \text{für } \lambda > 0 \\ 0 & \text{für } \lambda = 0 \\ -\big((-\lambda)a\big) & \text{für } \lambda < 0 \end{cases} .$$

In völliger Analogie zu den Vektorraumaxiomen gilt:

$$\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$$

$$(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$$

$$1a = a \quad \text{und} \quad 0a = 0 .$$

Wir nennen eine Teilmenge $\{a_1, \ldots, a_r\}$ einer abelschen Gruppe *linear unabhängig*, wenn gilt: Eine Beziehung der Form

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r = 0$$

kann nur gelten, wenn alle λ_i verschwinden. Die maximale Mächtigkeit einer linear unabhängigen Teilmenge von A heißt *Rang von* A und wird

mit rg(A) abgekürzt. Beispielsweise ist der Rang einer endlichen abelschen Gruppe stets Null, denn für jedes $a \in A$ gibt es ein $\lambda \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, so daß $\lambda a = 0$ ist. Beispiele für Gruppen mit positivem Rang sind die *freien abelschen Gruppen:* Eine abelsche Gruppe A heißt *frei*, wenn sie isomorph ist zu einer der Gruppen $\mathbb{Z}^r$ für ein $r \geq 0$, das auch unendlich sein kann. Offensichtlich hat eine solche Gruppe den Rang r mit den Urbildern der Einheitsvektoren $(1, 0, 0, \dots)$, $(0, 1, 0, \dots)$ als Elementen einer maximalen linear unabhängigen Teilmenge. Allgemeiner bezeichnen wir zu beliebiger vorgegebener Menge M die Gruppe

$$\mathbb{Z}^M = \bigoplus_{m \in M} \mathbb{Z}m$$

als *freie abelsche Gruppe über* M. Die Elemente dieser Gruppe lassen sich also als endliche Linearkombinationen der Elemente von M schreiben. Die freie abelsche Gruppe über der leeren Menge soll dabei einfach die triviale Gruppe $\{0\}$ sein.

In völliger Analogie zur Situation bei den Vektorräumen gilt:

Lemma: Alle maximalen linear unabhängigen Teilmengen einer abelschen Gruppe A haben die gleiche Mächtigkeit.

Beweis: $\{a_1, a_2, \dots\}$ und $\{b_1, b_2, \dots\}$ seien zwei maximale linear unabhängige Teilmengen von A. Dann enthält A die Untergruppe

$$U = \mathbb{Z}a_1 \oplus \mathbb{Z}a_2 \oplus \cdots \leq A,$$

und natürlich läßt sich U einbetten in den $\mathbb{R}$-Vektorraum

$$V = \mathbb{R}a_1 \oplus \mathbb{R}a_2 \oplus \cdots .$$

Da die a_i eine maximale linear unabhängige Menge bilden, muß es zu jedem b_j ein $\lambda_j \neq 0$ geben, so daß $\lambda_j b_j$ in U liegt; insbesondere bilden die $\lambda_j b_j$ also eine linear unabhängige Teilmenge von V, die wegen ihrer Maximalität in A sogar eine Basis von V sein muß. Da alle Basen eines Vektorraums die gleiche Mächtigkeit haben, ist der Satz bewiesen. ∎

Korollar: Für eine Untergruppe U einer abelschen Gruppe A gilt:

$$\text{rg}(A/U) = \text{rg}(A) - \text{rg}(U).$$

Beweis: Ergänze eine maximale linear unabhängige Teilmenge von U zu einer maximalen linear unabhängigen Teilmenge von A; die Restklassen der neu hinzukommenden Elemente bilden eine maximale linear unabhängige Teilmenge von A/U.

■

Zum Schluß sei noch der Vollständigkeit halber der *Strukturs*atz *für endlich erzeugbare abelsche Gruppen* angegeben:

Satz: Jede endlich erzeugbare abelsche Gruppe vom Rang r ist isomorph zu einer Gruppe der Form

$$\mathbb{Z}^r \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}/p_i^{e_i}$$

mit eindeutig bestimmten Primzahlpotenzen $p_i^{e_i}$.

Dieser Satz ist ein Korollar des *Elementarteilersatzes;* für seinen Beweis sei auf Vorlesungen über (kommutative) Algebra verwiesen. Für diese Vorlesung wird er nicht benötigt.

In der Topologie treten abelsche Gruppen meist in *Komplexen* auf:

Definition: Ein *Kettenkomplex* ist ein System $\mathcal{C}$ von abelschen Gruppen C_q, $q \geq 0$, zusammen mit Homomorphismen $\partial_q : C_q \to C_{q-1}$ derart, daß $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$ ist für alle q. Dabei setzen wir formal $C_{-1} = 0$ und $\partial_0 = 0$. Die Elemente von C_q heißen *q-Ketten,* die Abbildungen ∂_q heißen *Randabbildungen.* Eine q-Kette c heißt *q-Zyklus,* wenn $\partial_q(c) = 0$ ist; sie heißt *q-Rand,* wenn sie im Bild von C_{q+1} liegt. Insbesondere ist jeder q-Rand ein q-Zyklus, denn $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$. Die Gruppe aller q-Zykeln von $\mathcal{C}$ wird mit $Z_q(\mathcal{C})$ bezeichnet, die der q-Ränder mit $B_q(\mathcal{C})$. Die Faktorgruppe

$$H_q(\mathcal{C}) = Z_q(\mathcal{C})/B_q(\mathcal{C})$$

heißt q-te *Homologiegruppe* von $\mathcal{C}$.

Da ∂_q nur auf C_q definiert ist, werden wir anstelle von $\partial_q(c)$ im Allgemeinen einfach $\partial(c)$ schreiben, denn der Index q ist durch c eindeutig bestimmt.

Wir wollen nun jedem abstrakten simplizialen Komplex K einen Kettenkomplex $\mathcal{C}$(K) zuordnen. Dazu müssen wir zunächst die Simplizes von K orientieren:

Definition: Eine Orientierung eines abstrakten Simplex $\{v_0, \ldots, v_q\}$ ist eine Festlegung der Reihenfolge der Reihenfolge der v_i bis auf gerade Permutationen. Ein orientiertes Simplex $[v_0, \ldots, v_q]$ ist ein Simplex $\{v_0, \ldots, v_q\}$ zusammen mit der Orientierung, zu der die angegebene Reihenfolge der v_i gehört.

Offensichtlich hat also jedes q-Simplex mit $q \neq 0$ genau zwei verschiedene Orientierungen.

Für den Rest dieses Paragraphen wollen wir annehmen, daß wir stets eine Orientierung der sämtlichen Simplizes von K vorgegeben haben.

Definition: C_q(K), die Gruppe der q-Ketten von K, ist die freie abelsche Gruppe über der Menge der q-Simplizes von K.

Ist σ ein orientiertes Simplex aus K und τ dasselbe Simplex mit der entgegengesetzten Orientierung, so identifizieren wir τ mit der Kette $-\sigma$. Es ist klar, daß die Homologie von K nicht von der vorgegebenen Orientierung der Simplizes abhängt: Eine andere Orientierung bedeutet nur, daß wir andere Basen derselben Kettengruppen betrachten.

Um Randabbildungen definieren zu können, müssen wir zunächst wissen, was der Rand eines orientierten q-Simplex ist. Wir definieren

$$\partial_q[v_0, \ldots, v_q] \underset{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{q} (-1)^i [v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_q],$$

wobei das Dach über v_i bedeuten soll, daß diese Ecke ausgelassen wird:

$$[v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_q] \underset{\text{def}}{=} [v_0, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_q].$$

Die $(q-1)$-Kette $\partial_q[v_0, \ldots, v_q]$ hängt nur von der Orientierung des Simplex ab, nicht von der genauen Reihenfolge der v_i: Vertauschen wir zwei Ecken v_r und v_s, so ändert $[v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_q]$ für $i \neq r, s$ seine Orientierung, wird also mit (-1) multipliziert. Für $i = r$ oder s werden die

beiden Randsimplizes miteinander vertauscht und mit $(-1)^{r-s-1}$ multipliziert, denn wir brauchen $r-s-1$ Transpositionen um v_r bzw. v_s wieder auf seine „richtige“ Position zu bringen. Außerdem wird aber auch der Vorfaktor $(-1)^i$ noch mit $(-1)^{r-s}$ multipliziert, insgesamt gesehen wird also jedes Randsimplex mit (-1) multipliziert und damit der gesamte Rand. Da sich jede gerade Permutation als Produkt einer geraden Anzahl von Transpositionen schreiben läßt, folgt die Behauptung.

Damit können wir allgemein die Randabbildung ∂_q für q-Ketten definieren:

$$\partial_q : \begin{cases} C_q(\mathrm{K}) & \to C_{q-1}(\mathrm{K}) \\ \sum \lambda_i \sigma_i & \mapsto \sum \lambda_i \partial_q(\sigma_i) \end{cases} .$$

Lemma: $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$.

Beweis: Es genügt natürlich, dies für jedes q-Simplex einzeln nachzurechnen:

$$\begin{aligned}
&\partial_{q-1} \circ \partial_q [v_0, \ldots, v_q] \\
&= \partial_{q-1} \left(\sum (-1)^i [v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_q] \right) \\
&= \sum (-1)^i \partial_{q-1} [v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_q] \\
&= \sum_i \sum_{j<i} (-1)^{i+j} [v_0, \ldots, \widehat{v_j}, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_q] \\
&\quad + \sum_i \sum_{j>i} (-1)^{i+j-1} [v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, \widehat{v_j}, \ldots, v_q] \\
&= \sum_i \sum_{j<i} (-1)^{i+j} [v_0, \ldots, \widehat{v_j}, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_q] \\
&\quad - \sum_j \sum_{i<j} (-1)^{i+j} [v_0, \ldots, \widehat{v_j}, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_q] \\
&= 0 .
\end{aligned}$$

■

Damit haben wir also jedem abstrakten simplizialen Komplex K einen Kettenkomplex C(K) zugeordnet; seine Zykeln, Ränder und Homologie bezeichnen wir kurz auch als Zykeln, Ränder und Homologie von K. Insbesondere schreiben wir auch H_q(K) für $H_q\big(C(\mathrm{K})\big)$. Der Rang β_q von H_q(K) wird als q-te BETTI-Zahl des simplizialen Komplexes K bezeichnet.

Beispiel 1: Die Kreislinie: K sei ein abstrakter simplizialer Komplex, dessen topologische Realisierung die Kreislinie $\mathbb{S}^1$ ist. Ein solcher Komplex ist geometrisch gesehen natürlich nichts anderes als der Kantenzug eines n-Ecks. Wir orientieren die 1-Simplizes so, daß jede Ecke sowohl Anfangspunkt als auch Endpunkt einer Kante ist; wenn wir die Orientierung einer Kante willkürlich vorgeben, ist dadurch die Orientierung aller weiteren Kanten eindeutig bestimmt.

Da es in K keine q-Simplizes mit $q \geq 2$ gibt, ist also H_q(K) = 0 für $q \geq 2$, wir müssen also nur H_0(K) und H_1(K) berechnen,

Offensichtlich ist jedes 0-Simplex ein Zyklus, denn ∂_0 ist ja nach Definition gleich der Nullabbildung, und die Differenz zweier 0-Simplizes ist ein Rand, nämlich der Rand eines zusammenhängenden Kantenzugs, der die beiden Punkte miteinander verbindet. Also ist für zwei Nullsimplizes σ_i und σ_j die Kette $\sigma_i - \sigma_j$ ein Rand und B_0(K) ist gerade der Kern der Abbildung

$$Z_0(\mathrm{K}) = C_0(\mathrm{K}) \to \mathbb{Z}; \quad \sum \lambda_i \sigma_i \mapsto \sum \lambda_i,$$

d.h. $H_0(\mathrm{K}) \cong \mathbb{Z}$.

Eine 1-Kette kann nur dann ein Zyklus sein, wenn sie mit jeder Kante auch deren Vorgänger- und Nachfolgerkante mit genau gleicher Vielfachheit enthält; ist also c die Summe aller 1-Simplizes, so ist Z_1(K) = $\mathbb{Z}c$. Da es keine 2-Ketten gibt, gibt es auch keine 1-Ränder, d.h. $H_1(\mathrm{K}) = Z_1(\mathrm{K}) \cong \mathbb{Z}$.

Beispiel 2: Der Torus: Sei K eine seiner Triangulierungen. Da der Torus als $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ geschrieben werden kann, läßt sich K durch periodische Fortsetzung zu einer Triangulierung K$'$ der Ebene fortsetzen.

Genauer: Das Urbild eines q-Simplex aus |K| unter der Quotientenabbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ zerfällt in unendlich viele q-Simplizes, und die Menge aller so erhaltener Simplizes bildet eine Triangulierung von $\mathbb{R}^2$. Den zugehörigen abstrakten simplizialen Komplex bezeichnen wir mit K′ und wir wählen die Orientierungen seiner Dreiecke so, daß sie alle im Uhrzeigersinn durchlaufen werden. Dies definiert dann auch eine Orientierung der Dreiecke aus K, denn die verschiedenen Urbilder eines solchen Dreiecks gehen durch Parallelverschiebung auseinander hervor, sind also in K′ konsistent orientiert. Die Kanten seien irgendwie orientiert.

Wie üblich *(?)* ist auch hier wieder H_0(K) = $\mathbb{Z}$, gehen wir also gleich zu H_1. Ein 1-Zyklus z von K ist eine endliche Summe von geschlossenen zusammenhängenden Kantenzügen auf K; betrachten wir einen davon. O.B.d.A. sei die Identifikation des Torus mit $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ so gewählt, daß das Bild von $(0,0)$ eine Ecke von z ist. Dann läßt sich z liften zu einem zusammenhängenden Kantenzug c in K′, der in $(0,0)$ beginnt und in einem Punkt $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$ endet. Seien c_1 und c_2 zwei fest gewählte zusammenhängende Kantenzüge aus K′ von $(0,0)$ nach $(0,1)$ bzw. $(1,0)$, in denen keine Kante doppelt vorkommt und keine Ecke zu mehr als zwei Kanten gehört. Dann ist

$$d = c - mc_1 - nc_2$$

ein 1-Zyklus von K′, also – wie wir im vorigen Beispiel gesehen haben – sogar ein 1-Rand, und damit ist auch das Bild von d in K ein 1-Rand. Sind also z_1 und z_2 die Bilder von c_1 und c_2 in K, so sind z_1 und z_2 1-Zykeln mit der Eigenschaft, daß es für jeden beliebigen 1-Zyklus z von K ganze Zahlen n, m gibt, so daß $z - mz_1 - nz_2$ ein Rand ist, H_1(K) $\cong \mathbb{Z}^2$ wird also von den Äquivalenzklassen von z_1 und z_2 modulo den Rändern erzeugt. Geometrisch gesehen sind z_1 und z_2 gerade die beiden Kreise, deren Produkt der Torus ist.

Ein 2-Zyklus, schließlich, muß auch hier wieder mit jedem Dreieck auch dessen sämtliche Nachbarn enthalten, und da K ein endlicher Komplex ist, ist das auch möglich: Der Zyklus muß einfach ein ganzzahliges Vielfaches der Summe aller Dreiecke sein. Da es keine 2-Ränder gibt, ist also H_2(K) = Z_2(K) $\cong \mathbb{Z}$.

In beiden hier betrachteten Beispielen hingen die Homologiegruppen nicht vom simplizialen Komplex K ab, sondern nur vom topologischen Raum |K|. Im Rest dieses Paragraphen geht es hauptsächlich um den Beweis, daß dies allgemein so ist. Zuerst möchte ich aber eine Art schwache Version des EULERschen Polyedersatzes beweisen:

Satz: K sei ein endlicher simplizialer Komplex der Dimension n; die Anzahl seiner i-Simplizes sei α_i. Dann ist die alternierende Summe der α_i gleich der alternierenden Summe der BETTI-Zahlen von K:

$$\sum_{q=0}^{n}(-1)^q\alpha_q = \sum_{q=0}^{n}(-1)^q\beta_q$$

Beweis: Da Z_q(K) der Kern von ∂_q ist und B_{q-1}(K) das Bild, ist

$$C_q(\mathrm{K})/Z_q(\mathrm{K}) \cong B_{q-1}(\mathrm{K}),$$

also

$$\alpha_q = \mathrm{rg}\big(C_q(\mathrm{K})\big) = \mathrm{rg}\big(Z_q(\mathrm{K})\big) + \mathrm{rg}\big(B_{q-1}(\mathrm{K})\big).$$

Genauso folgt wegen $H_q(\mathrm{K}) = Z_q(\mathrm{K})/B_q(\mathrm{K})$:

$$\beta_q = rg\big(H_q(\mathrm{K})\big) = \mathrm{rg}\big(Z_q(\mathrm{K})\big) - \mathrm{rg}\big(B_q(\mathrm{K})\big).$$

Mithin ist

$$\beta_q = \alpha_q - \mathrm{rg}\big(B_{q-1}(\mathrm{K})\big) - \mathrm{rg}\big(B_q(\mathrm{K})\big),$$

wobei formal $B_{-1}(\mathrm{K}) = 0$ zu setzen ist. Bildet man die alternierende Summe, so heben sich wegen $B_n(\mathrm{K}) = 0$ die Ränge der Gruppen der Ränder gerade weg, womit die Behauptung gezeigt wäre. ∎

Als nächstes wollen wir sehen, daß die Homologiegruppen eines simplizialen Komplexes K nur vom topologischen Raum |K| abhängen. Die Beweisstrategie wird folgende sein: Wir betrachten zunächst spezielle Unterteilungen von endlichen simplizialen Komplexen und zeigen, daß eine solche Unterteilung eines Komplexes dieselbe Homologie hat wie der Komplex selbst. Dann folgern wird, daß dies auch noch für allgemeinere Unterteilungen gilt und zeigen, daß zwei endliche simpliziale

Komplexe eine gemeinsame verallgemeinerte Unterteilung und damit die gleiche Homologie haben. Dies beweist den Satz für kompakte Räume |K|.

1. Schritt: Unterteilungen

Beginnen wir mit Unterteilungen. Der Bequemlichkeit halber arbeiten wir im Rest dieses Paragraphen mit *geometrischen* simplizialen Komplexen, alle Simplizes sind also geometrische Simplizes in einem festen $\mathbb{R}^N$. Da jeder abstrakte simpliziale Komplex K eine geometrische Realisierung K hat, bedeutet dies keine Einschränkung der Allgemeinheit.

Umgekehrt bestimmt ein geometrischer simplizialer Komplex K auf eindeutige Weise einen abstrakten simplizialen Komplex K. Da wir im weiteren Verlauf dieses Paragraphen hauptsächlich mit geometrischen simplizialen Komplexen arbeiten werden, bezeichnen wir die Ketten, Zykeln und Rändern von K auch als Ketten, Zykeln und Ränder von K und setzen $H_q(K) = H_q(\mathrm{K})$. Da sich der Leser hoffentlich schon bisher alle Ketten als Aneinanderreihungen von geometrischen Simplizes vorgestellt hat, sollte dies zu keiner Verwirrung führen.

Definition: Ein (geometrischer) simplizialer Komplex L heißt Unterteilung des Komplexes K, wenn $|L| = |K|$ ist und wenn es für jedes Simplex t aus L ein Simplex s aus K gibt, so daß $t \subset s$ ist.

Man beachte, daß die beiden Simplizes s und t nicht die gleiche Dimension haben müssen: Wenn wir das verlangen wollten, hätte L genau die gleichen Ecken wie K, und es wäre $L = K$.

Es gibt eine kanonische Möglichkeit zur Unterteilung eines geometrischen simplizialen Komplexes, die *baryzentrische Unterteilung.* Erinnern wir uns daran, daß der *Schwerpunkt* eines Simplex s mit Ecken $P_0, \ldots, P_q$ der Punkt

$$b(s) = \frac{1}{q+1} \sum_{i=0}^{q} P_i$$

ist und definieren wir

Definition: Die erste baryzentrische Unterteilung eines geometrischen simplizialen Komplexes K ist jener Komplex K', dessen Ecken die Schwerpunkte der sämtlichen Simplizes von K sind und dessen Simplizes aufgespannt werden von Punkten $b(s_0), \ldots, b(s_q)$, wobei s_0 ein beliebiges Simplex von K ist und s_{i+1} für jedes i ein echtes Randsimplex (nicht notwendigerweise in Kodimension eins) von s_i ist.

Da jedes Nullsimplex sein eigener Schwerpunkt ist, kommen insbesondere auch alle Ecken von K unter den Ecken von K' vor. Die q-Simplizes $\langle b(s_0), \ldots, b(s_q)\rangle$ mit $q > 0$ sind echte Teilmengen von s_0, da sie höchstens *eine* Ecke von s_0 enthalten können. $b(s_0), \ldots, b(s_q)$ sind in allgemeiner Lage, denn sie sind konvexe Linearkombinationen der Ecken von s_0, und jedes $b(s_i)$ hängt von mindestens einer Ecke mehr ab als die folgenden $b(s_j)$, eine nichttriviale lineare Beziehung zwischen den $b(s_i)$ wäre also automatisch auch eine nichttriviale lineare Beziehung zwischen den Ecken von s_0, und die kann es nicht geben. Also ist K' ein Komplex und somit ein Unterkomplex von K.

Völlig analog können wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ die n-te baryzentrische Unterteilung $K^{(n)}$ von K rekursiv definieren durch $K^{(1)} = K'$ und $K^{(n+1)} = K^{(n)\prime}$. Der wesentliche Punkt des Beweises, daß die Homologie eines Komplexes nur von seiner topologischen Realisierung abhängt, besteht darin, zu zeigen, daß die sämtlichen $K^{(n)}$ gleiche Homologie haben.

Wir zeigen dies zunächst in einem ganz einfachen, aber wichtigen Fall: für die baryzentrische Unterteilung eines einzelnen Simplex.

2. Schritt: Die Homologie von Kegeln

Der Komplex K bestehe aus einem Simplex s und dessen sämtlichen Randsimplizes, und K' sei seine erste baryzentrische Unterteilung. K' hat einen Unterkomplex L, der aus jenen Simplizes von K' besteht, die auf dem Rand von s liegen. Jedes Simplex t von K', das nicht zu L gehört, hat den Schwerpunkt $b(s)$ von s als Ecke, denn das ist die einzige Ecke von K', die nicht in L liegt. Zu einem solchen Simplex t gibt es daher ein Simplex $u = \langle P_1, \ldots, P_q\rangle$ aus L, so daß sich t in der Form

$$t = b(s) \cdot u \underset{\text{def}}{=} \langle b(s), P_1, \ldots, P_q\rangle$$

schreiben läßt. Diese Situation wollen wir formalisieren und verallgemeinern:

Definition: K sei ein geometrischer simplizialer Komplex in $\mathbb{R}^N$ und P sei ein Punkt aus $\mathbb{R}^N$, der entweder eine Ecke von K ist oder aber in keinem von einem Simplex aus K aufgespannten affinen Unterraum von $\mathbb{R}^N$ liegt. Der Kegel über K mit Spitze P ist jener geometrische simpliziale Komplex $L = P \cdot K$ mit $L_0 = K_0 \cup \{P\}$, dessen q-Simplizes für $q > 0$ einerseits die sämtlichen q-Simplizes von K sind, andererseits alle Simplizes der Form $P \cdot s$, wobei s ein $(q-1)$-Simplex von K ist, das P nicht als Ecke hat.

Im obigen Beispiel ist also K' der Kegel über L mit Spitze $b(s)$.

Im folgenden schreiben wir für eine beliebige Kette $c = \sum \lambda_i s_i$

$$P \cdot c \underset{\text{def}}{=} \sum \lambda_i \, P \cdot s_i \ ,$$

wobei $P \cdot s_i = 0$ sein soll, wenn P eine Ecke von s_i ist.

Wir beweisen nun allgemein, daß die Homologie eines Kegels trivial ist. Da die nullte Homologiegruppe eines simplizialen Komplexes immer zumindest die Äquivalenzklasse eines einzelnen Punktes enthält, kann „Trivialität“ hier natürlich nicht bedeuten, daß alle Homologiegruppen verschwinden, sondern

Definition: Wir sagen, ein Komplex K sei azyklisch oder habe triviale Homologie, wenn $H_q(K) = 0$ ist für $q > 0$ und $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$.

Lemma: Ein Kegel $L = P \cdot K$ hat triviale Homologie.

Beweis: Da jede Ecke von L durch eine Kante mit P verbunden werden kann, ist natürlich $H_0(L) \cong \mathbb{Z}$. Für $q > 0$ hat jeder q-Zyklus z von L eine eindeutige Darstellung $z = P \cdot c + d$, wobei $c \in C_{q-1}(K)$ und $d \in C_q(K)$. Daher ist

$$0 = \partial_q z = c - P \cdot \partial_{q-1} c + \partial_q d.$$

Dabei ist $c + \partial d$ eine Kette aus K, keines ihrer Simplizes hat also den Punkt P als Ecke, wohingegen in der Kette $P \cdot \partial_{q-1} c$ jedes Simplex

P als Ecke hat. Daher haben die beiden Ketten kein Simplex gemeinsam, müssen also beide verschwinden:

$$c + \partial_q d = 0 \quad \text{und} \quad P \cdot \partial_{q-1} c = 0.$$

Nach der ersten dieser Gleichungen ist

$$z = P \cdot c + d = d - P \cdot \partial_q d = \partial_{q+1}(P \cdot d)$$

ein Rand, wie behauptet. ∎

Korollar: Der Komplex, der aus einem Simplex s und dessen sämtlichen Seitensimplizes besteht, hat triviale Homologie.

Das ist klar, denn für jede Ecke P von s läßt sich s als Kegel $P \cdot s'$ schreiben, wobei s' das P gegenüberliegende Simplex ist, oder auch einfach als $P \cdot \partial s$. ∎

3. Schritt: Simpliziale Abbildungen und Kettenabbildungen

Zum Vergleich der Homologie zweier simplizialer Komplexe müssen wir Abbildungen zwischen diesen Komplexen betrachten und diese auf die zugehörigen Kettenkomplexe und Homologiegruppen fortsetzen. Der natürliche Abbildungsbegriff für Abbildungen zwischen Komplexen ist folgender:

Definition: Eine simpliziale Abbildung zwischen zwei simplizialen Komplexen L und K ist eine Abbildung $\varphi\colon L_0 \to K_0$ von der Menge L_0 der Ecken von L in die Menge K_0 der Ecken von K derart, daß die Ecken eines jeden Simplex s von L auf (nicht notwendigerweise verschiedene) Ecken eines Simplex von K abgebildet werden. Das kleinste Simplex aus L mit dieser Eigenschaft bezeichnen wir mit $\varphi(s)$.

Eine simpliziale Abbildung $\varphi\colon L_0 \to K_0$ definiert eine Abbildung $\hat{\varphi}\colon |L| \to |K|$ durch lineare Fortsetzung in das Innere der Simplizes: Jeder Punkt $P \in |L|$ ist innerer Punkt eines Simplex von L und läßt sich daher als konvexe Linearkombination $\sum \lambda_i P_i$ von dessen Ecken $P_0, \ldots, P_r$ schreiben; wir setzen

$$\hat{\varphi}(P) = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i \varphi(P_i).$$

φ induziert auch eine Abbildung zwischen den Kettenkomplexen $\mathcal{C}(K)$ und $\mathcal{C}(L)$, aber dazu müssen wir zunächst definieren, was eine solche Abbildung sein soll:

Definition: Eine Kettenabbildung $\varphi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zwischen zwei Kettenkomplexen $\mathcal{C} = \{C_q, \partial_q\}$ und $\mathcal{D} = \{D_q, \partial'_q\}$ ist ein System von Abbildungen $\varphi_q\colon C_q \to D_q$ derart, daß $\varphi_{q-1} \circ \partial_q = \partial'_q \circ \varphi_q$ ist.

Versuchen wir also, der simplizialen Abbildung $\varphi\colon K_0 \to L_0$ eine Kettenabbildung $\tilde{\varphi}\colon \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(L)$ zuordnen. Dabei stoßen wir auf das Problem, daß eine simpliziale Abbildung ein Simplex von K auf ein Simplex von L mit niedrigerer Dimension abbilden kann. Wie sich zeigen wird, verlieren wir nichts, wenn wir solche Simplizes einfach ignorieren; wir definieren also $\tilde{\varphi}(s)$ für ein q-Simplex s mit Ecken $P_0, \ldots, P_q$ aus K als Null, falls die Punkte $\varphi(P_0), \ldots, \varphi(P_q)$ nicht paarweise verschieden sind, und sonst als das von ihnen aufgespannte q-Simplex von L. Durch lineare Fortsetzung auf die Kettengruppe erhalten wir daraus einen Homomorphismus

$$\tilde{\varphi}_q\colon C_q(K) \to C_q(L); \quad \sum \lambda_i s_i \mapsto \sum \lambda_i \tilde{\varphi}_q(s_i)\ .$$

Beim Nachweis, daß dies in der Tat eine Kettenabbildung ist, können wir uns auf ein einzelnes Simplex s aus K zu beschränken; dessen Ecken seien $P_0, \ldots, P_q$. Falls alle $\varphi(P_i)$ verschieden sind, gibt es keinerlei Probleme. Wenn zwei Punkte P_i und P_j übereinstimmen, ist $\tilde{\varphi}_q(s) = 0$, also auch $\partial'_q\big(\tilde{\varphi}_q(s)\big) = 0$; wir müssen zeigen, daß auch $\tilde{\varphi}_{q-1}\big(\partial_q(s)\big)$ verschwindet. Für alle Randsimplizes, in denen sowohl P_i als auch P_j vorkommen, ist das klar, $\tilde{\varphi}_{q-1}\big(\partial_q(s)\big)$ enthält also höchstens die beiden Randsimplizes, in denen $\varphi(P_i)$ bzw. $\varphi(P_j)$ gestrichen wird. Diese beiden sind aber gleich und treten mit entgegengesetztem Vorzeichen auf, da der Vorfaktor den Beitrag $(-1)^{(i-j)}$ liefert und die Transposition den Beitrag $(-1)^{(i-j-1)}$. (Man vergleiche mit der Rechnung, die zeigte, daß der Rand eines Simplex nur von der Orientierung abhängt.)

Als nächstes brauchen wir Abbildungen zwischen den Homologiegruppen; die gibt es für jede Kettenabbildung nach dem folgenden

Lemma: Eine Kettenabbildung $\varphi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ induziert Homomorphismen $\varphi_{*q}\colon H_q(\mathcal{C}) \to H_q(\mathcal{D})$ für alle $q \geq 0$. Ist $\psi\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ eine weitere

Kettenabbildung, so ist auch $\psi \circ \varphi: \mathcal{C} \to \mathcal{E}$, das System der Abbildungen $\psi_q \circ \varphi_q$, eine Kettenabbildung, und $(\psi \circ \varphi)_{*q} = \psi_{*q} \circ \varphi_{*q}$.

Beweis: Jedes $h \in H_q(\mathcal{C})$ hat einen Repräsentanten $z \in Z_q(\mathcal{C})$; wir wollen $\varphi_{*q}(h)$ als die Homologieklasse von $\varphi_q(z)$ definieren. Dies ist wohldefiniert, denn wegen

$$\partial'_q\big(\varphi_q(z)\big) = \partial'_q \circ \varphi_q(z) = \varphi_{q-1} \circ \partial_q(z) = \varphi_{q-1}(0) = 0$$

liegt $\varphi_q(z)$ in $Z_q(\mathcal{D})$, und wenn wir anstelle von z einen anderen Repräsentanten z' nehmen, so unterscheiden sich z und z' durch einen Rand, d.h. $z' = z + \partial_{q+1}(c)$ für eine Kette $c \in C_{q+1}$ und

$$\varphi_q(z') = \varphi_q(z) + \varphi_q\big(\partial_{q+1}(c)\big) = \varphi_q(z) + \partial'_{q+1}\big(\varphi_{q+1}(c)\big),$$

$\varphi_q(z)$ und $\varphi_q(z')$ unterscheiden sich also nur um einen Rand und definieren daher die gleiche Restklasse in $H_q(\mathcal{D})$. Die restlichen Behauptungen sind trivial. ∎

Da somit jede Kettenabbildung Homomorphismen zwischen den Homologiegruppen induziert, induziert auch jede simpliziale Abbildung φ Homomorphismen $\tilde{\varphi}_{*q}$, die wir der Einfachheit halber als φ_{*q} schreiben. Natürlich gilt auch hier wieder für zusammengesetzte Abbildungen $\psi \circ \varphi$, daß $(\psi \circ \varphi)_{*q} = \psi_{*q} \circ \varphi_{*q}$ ist.

4. Schritt: Benachbarte Abbildungen und Kettenhomotopien

Hier geht es um hinreichende Bedingungen dafür, daß zwei Kettenabbildungen die gleichen Homomorphismen auf der Homologie induzieren.

Definition: a) Zwei simpliziale Abbildungen $\varphi, \psi: \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(L)$ zwischen den Kettenkomplexen zu den simplizialen Komplexen K und L heißen benachbart, wenn es zu jedem q-Simplex s von K ein Simplex t von L gibt, so daß $\varphi(s)$ und $\psi(s)$ beide Randsimplizes von t sind.

b) Zwei simpliziale Abbildungen $\varphi, \psi: \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(L)$ zwischen den Kettenkomplexen zu den simplizialen Komplexen K und L heißen ähnlich, wenn es zu jedem q-Simplex s von K einen Unterkomplex $L(s)$ von L gibt, so daß gilt:

1. $L(s)$ hat triviale Homologie.

2. Für jedes Simplex s von K liegen sowohl $\varphi(s)$ als auch $\psi(s)$ in $L(s)$.
3. Für jedes Randsimplex t eines Simplex s aus K ist $L(t)$ ein Unterkomplex von $L(s)$.

c) Zwei Kettenabbildungen $\varphi, \psi: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zwischen den Kettenkomplexen $\mathcal{C} = \{C_q, \partial_q\}$ und $\mathcal{D} = \{D_q, \partial'_q\}$ heißen homotop, wenn es für jedes $q \geq 0$ einen Homomorphismus $\gamma_q: C_q \to D_{q+1}$ gibt, so daß gilt:

$$\partial'_{q+1} \circ \gamma_q + \gamma_{q-1} \circ \partial_q = \varphi_q - \psi_q.$$

Damit dies auch für $q = 0$ sinnvoll ist, setzen wir formal $\gamma_{-1} = 0$.

Natürlich sind benachbarte Abbildungen ähnlich, wir müssen nur $L(s)$ gleich dem kleinsten Simplex setzen, das $\varphi(s)$ und $\psi(s)$ als Randsimplizes hat, denn wir wissen schon aus dem zweiten Schritt, daß Simplizes triviale Homologie haben. Wir wollen nun sehen, daß ähnliche Abbildungen homotop sind, und daß homotope Abbildungen zwischen Kettenkomplexen die gleichen Homomorphismen zwischen den Homologiegruppen induzieren.

Lemma: Ähnliche Abbildungen $\varphi, \psi: \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(L)$ sind homotop.

Beweis: Wir müssen für jedes q-Simplex s von K eine $(q+1)$-Kette $\gamma_q(s)$ aus L angeben, so daß

$$\partial'_{q+1} \circ \gamma_q + \gamma_{q-1} \circ \partial_q = \varphi_q - \psi_q$$

ist. Die entsprechenden Abbildungen γ_q werden induktiv definiert; wegen ihrer Linearität genügt es, $\gamma_q(s)$ für q-Simplizes s anzugeben. $\gamma_q(s)$ wird dabei immer sogar eine Kette aus dem Unterkomplex $L(s)$ sein.

Für $q = 0$, eine Ecke s von K also, sind $\varphi(s)$ und $\psi(s)$ Ecken des azyklischen Unterkomplexes $L(s)$ von L. Da dessen nullte Homologiegruppe gleich $\mathbb{Z}$ ist, muß die 0-Kette $\varphi(s) - \psi(s)$ Rand einer 1-Kette aus $L(s)$ sein; diese 1-Kette nennen wir $\gamma_0(s)$. Nach Konstruktion ist

$$\partial'_1 \circ \gamma_0(s) = \varphi_0(s) - \psi_0(s),$$

wie gewünscht.

Seien nun $\gamma_0, \ldots, \gamma_{q-1}$ bereits so definiert, daß die geforderte Gleichung für alle p-Simplizes mit $p < q$ gilt, und sei s ein q-Simplex aus K. Für

jedes $(q-1)$-Simplex t aus dem Rand von s ist $\gamma_{q-1}(t)$ definiert und liegt in $L(t) \subset L(s)$. Daher liegt auch $\gamma_{q-1}\big(\partial_q(s)\big)$ in $L(s)$, genauso wie $\varphi(s)$ und $\psi(s)$. Folglich ist

$$c = \varphi_q(s) - \psi_q(s) - \gamma_{q-1}\big(\partial_q(s)\big)$$

eine Kette in $L(s)$, sogar ein Zyklus, denn

$$\begin{aligned}\partial'_q(c) &= \partial'_q \circ \varphi_q(s) - \partial'_q \circ \psi_q(s) - \partial'_q \circ \gamma_{q-1}\big(\partial_q(s)\big)\\ &= \varphi_{q-1} \circ \partial_q(s) - \psi_{q-1} \circ \partial_q(s) - \partial'_q \circ \gamma_{q-1}\big(\partial_q(s)\big)\\ &= \big(\varphi_{q-1} - \psi_{q-1} - \partial'_q \circ \gamma_{q-1}\big)\big(\partial_q(s)\big),\end{aligned}$$

und das ist nach Induktionsvoraussetzung gleich

$$\gamma_{q-2} \circ \partial_{q-1} \circ \partial_q(s) = 0\ .$$

Da der q-Zyklus c im azyklischen Komplex $L(s)$ liegt, ist er Rand einer $(q+1)$-Kette aus $L(s)$. Wir setzen $\gamma_q(s)$ gleich einer solchen Kette; dann ist die Bedingung an γ_q nach Konstruktion erfüllt.

■

Das zweite Lemma ist noch einfacher:

Lemma: Für homotope Kettenabbildungen $\varphi, \psi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ stimmen φ_{*q} und ψ_{*q} für alle q überein.

Beweis: Wir müssen zeigen, daß $\varphi_q(z) - \psi_q(z)$ für jeden Zyklus z aus $Z_q(\mathcal{C})$ in der Rändergruppe $B_q(\mathcal{D})$ liegt. Das ist aber klar, denn

$$\varphi_q(z) - \psi_q(z) = \partial'_{q+1}\big(\gamma_q(z)\big) + \gamma_{q-1}\big(\partial_q(z)\big) = \partial'_{q+1}\big(\gamma_q(z)\big),$$

denn $\partial_q(z)$ verschwindet für einen Zyklus z.

■

Insbesondere induzieren also ähnliche Abbildungen die gleichen Homomorphismen auf der Homologie. Um im nächsten Schritt zu zeigen, daß die Homologie eines Komplexes gleich der seiner baryzentrischen Unterteilungen ist, werden wir dies auf eine spezielle Abbildung anwenden:

5. Schritt: Die SPERNER-Abbildung

K sei ein simplizialer Komplex, K' seine erste baryzentrische Unterteilung. Als SPERNER-Abbildung bezeichnen wir „die“ simpliziale Abbildung $\omega\colon (K')_0 \to K_0$, die jeder Ecke $b(s)$ von K' irgendeine der Ecken von s zuordnet, sowie auch die dadurch auf den Kettengruppen induzierte Abbildung $\omega\colon \mathcal{C}(K') \to \mathcal{C}(K)$.

Wir wollen in diesem Schritt einsehen, daß die auf der Homologie induzierten Abbildungen

$$\omega_{*q}\colon H_q(K') \to H_q(K)$$

Isomorphismen sind. Zu diesem Zweck konstruieren wir eine Kettenabbildung $\omega^-\colon \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(K')$ derart, daß ω_{*q} und ω^-_{*q} für alle q zueinander invers sind. Die linearen Abbildungen $\omega^-_q\colon C_q(K) \to C_q(K')$ werden induktiv konstruiert:

$\omega^-_0\colon C_0(K) \to C_0(K')$ ist diejenige Abbildung, die jede Ecke auf sich selbst abbildet. Für $q > 0$ soll ω^-_q jedes q-Simplex s von K abbilden auf die Summe aller q-Simplizes von K', die in s liegen. Formal erklären wir das folgendermaßen: Für eine q-Kette $c = \sum \lambda_i s_i$ aus einem simplizialen Komplex und eine Ecke P, die in keinem der s_i vorkommt, definieren wir ein $(q+1)$-Kette

$$P \cdot c = \sum \lambda_i \; P \cdot s_i,$$

wobei $P \cdot s$ für ein orientiertes q-Simplex s mit Ecken $P_0, \dots P_q$ das orientierte $(q+1)$-Simplex mit Ecken $P, P_0, \dots, P_q$ bezeichnen soll, also den Kegel über s mit Spitze P. Mit dieser Bezeichnung soll dann gelten

$$\omega^-_q(s) \underset{\text{def}}{=} b(s) \cdot \omega^-_{q-1}\big(\partial_q(s)\big).$$

Man überzeugt sich leicht durch Induktion, daß dies eine Kettenabbildung definiert, denn

$$\begin{aligned}
\partial_q\big(\omega^-_q(s)\big) &= \partial_q\Big(b(s) \cdot \omega^-_{q-1}\big(\partial_q(s)\big)\Big) \\
&= \omega^-_{q-1}\big(\partial_q(s)\big) - b(s) \cdot \partial_{q-1}\big(\omega^-_{q-1}(\partial_q(s))\big) \\
&= \omega^-_{q-1}\big(\partial_q(s)\big) - b(s) \cdot \omega^-_{q-2}\big(\partial_{q-1} \circ \partial_q(s)\big) \\
&= \omega^-_{q-1}\big(\partial_q(s)\big).
\end{aligned}$$

Ebenfalls durch Induktion folgt, daß

$$\omega_q \circ \omega_q^- = \mathrm{id}_{C_q(K)}$$

ist, denn für $q = 0$ ist dies klar, und für jedes q-Simplex s mit $q > 0$ ist

$$\begin{aligned}\omega_q \circ \omega_q^-(s) &= \omega_q\big(b(s) \cdot \omega_{q-1}^-(\partial_q s)\big) = \omega\big(b(s)\big) \cdot \big(\omega_{q-1} \circ \omega_{q-1}^-\big)(\partial_q s) \\ &= \omega\big(b(s)\big) \cdot \partial_q(s) = s,\end{aligned}$$

weil $\omega\big(b(s)\big)$ nach Konstruktion eine Ecke von s ist und $\partial_q(s)$ insbesondere auch das dieser Ecke gegenüberliegende Randsimplex enthält.

Die umgekehrte Gleichung

$$\omega_q^- \circ \omega_q = \mathrm{id}_{C_q(K')}$$

ist offensichtlich falsch, denn natürlich kann ω_q nicht injektiv sein. Für unsere Zwecke genügt es aber, wenn wir anstelle der Gleichheit nur die Ähnlichkeit der beiden Abbildungen zeigen, und die ist fast klar: Ein Simplex s' aus K' hat die Form

$$s' = \big\langle b(s), b(s_1), \ldots, b(s_q)\big\rangle,$$

wobei die s_i Seitensimplizes von s sind; wir definieren $K'(s')$ als die Menge aller Simplizes aus K', die in s liegen. Wie wir im zweiten Schritt gesehen haben, hat dieser Komplex triviale Homologie, außerdem liegen sowohl $\omega_q \circ \omega_q^-(s')$ als auch $\mathrm{id}_{C_q(K)}(s')$ in $K'(s')$, also sind die beiden Abbildungen ähnlich. Es folgt, daß sowohl

$$\omega_{*q}^- \circ \omega_{*q} \colon H_q(K') \to H_q(K')$$

als auch

$$\omega_{*q} \circ \omega_{*q}^- \colon H_q(K) \to H_q(K)$$

identische Abbildungen sind, also ist

$$\omega_{*q} \colon H_{*q}(K) \to H_{*q}(K')$$

ein Isomorphismus. Durch Iteration von SPERNER-Abbildungen folgt sofort

Satz: Für jeden simplizialen Komplex K und für jede baryzentrische Unterteilung $K^{(n)}$ von K ist $H_q(K) \cong H_q\big(K^{(n)}\big)$.

■

6. Schritt: Verfeinerungen endlicher simplizialer Komplexe

Hier kommen wir nun zu der angekündigten Verallgemeinerung des Unterteilungsbegriffs. Dazu brauchen wir zunächst zwei neue Begriffe aus der Theorie der simplizialen Komplexe:

Definition: K sei ein simplizialer Komplex und P sei eine Ecke von K. Der Stern von P ist die Vereinigung $\mathrm{st}_K(P)$ der Inneren aller jener Simplizes aus K, die P als Ecke haben. Der Link von P ist die Vereinigung $\mathrm{lk}_K(P)$ aller Simplizes aus $\overline{\mathrm{st}_K(P)}$, die P nicht als Ecke enthalten.

Offensichtlich ist der abgeschlossene Stern $\overline{\mathrm{st}_K(P)}$ von P die geometrische Realisierung eines Unterkomplexes $\mathrm{St}_K(P)$, und der Link von P ist geometrische Realisierung eines Unterkomplexes $\mathrm{Lk}_K(P)$ von $\mathrm{St}_K(P)$. Weiter ist $\mathrm{St}_K(P) = P \cdot \mathrm{Lk}_K(P)$ ein Kegel; insbesondere hat $\mathrm{St}_K(P)$ also nach dem Lemma aus dem zweiten Schritt triviale Homologie.

Wenn der zugrundeliegende Komplex klar ist, werden wir in Zukunft den Index K weglassen.

Der Stern von P ist nach Konstruktion eine offene Menge, und die Sterne der sämtlichen Ecken von K bilden eine Überdeckung von $|K|$. Verfeinerungen von Komplexen sollen nun so definiert werden, daß sie Verfeinerungen dieser Überdeckung entsprechen. Einen trivialen, aber nützlichen Zusammenhang zwischen den Eigenschaften der Überdeckungsmengen und der simplizialen Struktur des Komplexes liefert das folgende

Lemma: Die Ecken $P_0, \ldots, P_q$ eines simplizialen Komplexes K gehören genau dann zu einem gemeinsamen Simplex von K, wenn ihre Sterne nichtleeren Durchschnitt haben.

Beweis: Falls $P_0, \ldots, P_q$ zu einem gemeinsamen Simplex gehören, liegt dessen Inneres natürlich im Stern eines jeden P_i, also auch im Durchschnitt dieser Sterne. Enthält umgekehrt $\cap_{i=0}^{q}\mathrm{st}(P_i)$ einen Punkt Q, so muß dieser für jedes i innerer Punkt eines Simplex mit Ecke P_i sein. Da jeder Punkt aber nur im Innern eines einzigen Simplex aus K liegen kann, gehört Q zu einem Simplex, das alle P_i als Ecken hat.

■

Damit können wir nun endlich die Verfeinerungen eines Komplexes definieren:

Definition: Ein (geometrischer) simplizialer Komplex L heißt Verfeinerung eines Komplexes K, in Zeichen $L < K$, wenn $|L| = |K|$ ist und wenn es zu jeder Ecke P von L eine Ecke Q von K gibt, so daß $\mathrm{st}_L(P)$ in $\mathrm{st}_K(Q)$ liegt.

Beispielsweise ist jede baryzentrische Unterteilung eine Verfeinerung; hier erhält man Q aus P durch eine SPERNER-Abbildung.

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß je zwei endliche simpliziale Komplexe, die die gleiche Teilmenge von $\mathbb{R}^N$ triangulieren, eine gemeinsame Verfeinerung haben, und daß Verfeinerungen die gleichen Homologiegruppen haben wie der ursprüngliche Komplex. Der hier vorgestellt Beweis mit baryzentrischen Unterteilungen läßt sich nur für endliche simpliziale Komplexe durchführen, ab jetzt müssen wir also Endlichkeit voraussetzen. Um dafür ein kurzes Wort zu haben, definieren wir

Definition: Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^N$ heißt Polyeder, wenn sie Vereinigung der Simplizes eines endlichen geometrischen simplizialen Komplexes ist.

Ein Polyeder ist also eine Teilmenge des $\mathbb{R}^N$, die durch endlich viele Hyperebenen (mit nicht notwendigerweise gleicher Dimension) begrenzt wird.

Um nun zu zeigen, daß die Homologie eines Polyeders nur von diesem selbst abhängt, nicht aber von einer Triangulierung, brauchen wir zunächst einige metrische Vorbereitungen.

Definition: Die Maschenweite $\mu(K)$ eines endlichen simplizialen Komplexes K im $\mathbb{R}^N$ ist das Supremum der Abstände zwischen zwei Punkten eines Simplex von K bezüglich der Metrik des $\mathbb{R}^N$.

Lemma: $\mu(K)$ ist das Maximum der Abstände zwischen zwei Ecken eines Simplex aus K.

Beweis: a sei der größte Abstand zwischen zwei Ecken. Für einen beliebigen Punkt Q aus dem Simplex sei P_i die am weitesten entfernte Ecke; dann enthält die Kugel mit Radius $d(Q, P_i)$ alle Ecken, also das ganze Simplex, und somit ist

$$d(Q, R) \leq d(Q, P_i)$$

für alle Simplexpunkte R. Ist P_j diejenige Ecke, die am weitesten von P_i entfernt ist, so gilt aus dem gleichen Grund

$$d(Q, P_i) \leq d(P_j, P_i),$$

also

$$d(Q, R) \leq d(Q, P_i) \leq d(P_j, P_i) \leq a,$$

wie behauptet.

■

Bei der Konstruktion einer gemeinsamen Verfeinerung werden natürlich die baryzentrischen Unterteilungen eine große Rolle spielen; insbesondere müssen wir wissen, daß ihre Maschenweite beliebig klein werden kann. Dies folgt aus

Lemma: K sei ein geometrischer simplizialer Komplex in $\mathbb{R}^N$, dessen Simplizes alle höchstens die Dimension r haben. Dann ist

$$\mu(K') \leq \frac{r}{r+1}\mu(K).$$

Beweis: Die Maschenweite von K' ist der größte Abstand zwischen zwei Ecken eines Simplex aus K'; seien also zwei solche Ecken gegeben. Nach Konstruktion von K' gibt es dazu ein Simplex

$$s = \langle P_0, \ldots, P_q \rangle$$

von K und ein Randsimplex t von s, o.B.d.A. das von P_0 bis P_p aufgespannte, so daß die gegebenen Ecken die Schwerpunkte $b(s)$ und $b(t)$

von s und t sind. Der Vektor zwischen den beiden Ecken ist dann

$$\begin{aligned} b(t) - b(s) &= \frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p} P_i - \frac{1}{q+1}\sum_{i=0}^{q} P_i \\ &= \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{q+1}\right)\sum_{i=0}^{p} P_i - \frac{1}{q+1}\sum_{i=p+1}^{q} P_i \\ &= \frac{q-p}{(p+1)(q+1)}\sum_{i=0}^{p} P_i - \frac{1}{q+1}\sum_{i=p+1}^{q} P_i \\ &= \frac{q-p}{q+1}\left(\frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p} P_i - \frac{1}{q-p}\sum_{i=p+1}^{q} P_i\right). \end{aligned}$$

In der Klammer steht der Verbindungsvektor zwischen einem der Punkte des Simplex $\langle P_0, \ldots, P_p\rangle$ und einem der Punkte des Simplex $\langle P_{p+1}, \ldots, P_q\rangle$, von zwei Punkten aus s also, und deren Abstand kann nicht größer sein als $\mu(K)$. Also ist

$$d\big(b(t), b(s)\big) \leq \frac{q-p}{q+1}\mu(K) \leq \frac{q}{q+1}\mu(K) \leq \frac{r}{r+1}\mu(K),$$

wie behauptet. ∎

Damit können wir zeigen

Lemma: Für zwei endliche simpliziale Komplexe K und L, für die $|K| = |L|$ ist, gibt es stets eine natürliche Zahl n, so daß die n-te baryzentrische Unterteilung $K^{(n)}$ von K eine Verfeinerung von L ist. Insbesondere haben K und L eine gemeinsame Verfeinerung M.

Beweis: Die Sterne der Ecken P von L bilden eine offene Überdeckung von $|L| = |K|$. Da $|L|$ wegen der Endlichkeit von L eine kompakte Teilmenge eines $\mathbb{R}^N$ ist, gibt es zu dieser Überdeckung eine LEBESGUE-Zahl δ derart, daß jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}^N$ mit einem Durchmesser kleiner δ in einer Überdeckungsmenge liegt. (Siehe dazu in S5 den Beweis, daß eine Teilmenge von $\mathbb{R}^N$ genau dann kompakt ist, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.) Aus dem gerade gezeigten Lemma

folgt, daß wir eine Zahl n finden können, so daß $\mu(K^{(n)}) < \delta/2$ ist. Da der Durchmesser eines Sterns höchstens gleich der doppelten Maschenweite sein kann, ist $K^{(n)}$ eine Verfeinerung von L und erst recht natürlich von K.

■

Satz: Für zwei endliche geometrische simpliziale Komplexe K und L mit $|K| = |L|$ sind $H_q(K)$ und $H_q(L)$ isomorph für alle q.

Beweis: Da L und K eine gemeinsame Verfeinerung haben, können wir uns auf den Fall $L < K$ beschränken. Dann läßt sich leicht eine simpliziale Abbildung $L \to K$ angeben: Man ordnet einfach jeder Ecke $P \in L_0$ eine Ecke $Q \in K_0$ zu derart, daß $\mathrm{st}_L(P) \subset \mathrm{st}_K(Q)$ ist. Diese Abbildung definiert Homomorphismen

$$\tau(L,K)_q \colon H_q(L) \to H_q(K)$$

für alle q, und diese hängen nur von L, K und q ab, nicht von der simplizialen Abbildung $L \to K$, denn je zwei solche Abbildungen sind ähnlich, da st(Q) und st(Q') nur dann einen nichtleeren Durchschnitt haben können, wenn QQ' eine Kante von K ist. Sei nun n so gewählt, daß $K^{(n)}$ eine Verfeinerung von L ist. Dann ist $K^{(n)} < L < K$, und wegen der Eindeutigkeit von τ ist einerseits $\tau(K^{(n)}, K)_q = \tau(L,K)_q \circ \tau(K^{(n)}, L)_q$, andererseits aber wird $\tau(K^{(n)}, K)_q$ von einer Iteration von SPERNER-Abbildungen induziert, ist also ein Isomorphismus. Damit ist auch $\tau(L,K)_q$ ein Isomorphismus, und der Satz ist bewiesen.

■

7. Schritt: Simpliziale Approximation von Abbildungen

Wir wissen nun, daß die Homologie eines Polyeders nicht von dessen Triangulierung abhängt, sondern nur vom Polyeder selbst. Wir wissen aber noch nicht, daß zueinander homöomorphe Polyeder wie etwa der Würfel und das Tetraeder beide die gleiche Homologie haben, und wir können daher insbesondere noch nicht von „der“ Homologie der Vollkugel oder eines anderen krummlinig begrenzten Körpers sprechen. Diese letzte Lücke schließt der siebte Schritt, in dem wir stetigen Abbildungen zwischen Polyedern simpliziale Abbildungen zwischen deren

Triangulierungen und damit Homomorphismen zwischen den Homologiegruppen zuordnen und zeigen, daß einem Homöomorphismus Isomorphismen der Homologiegruppen zugeordnet werden.

Definition: K und L seinen simpliziale Komplexe. Eine simpliziale Abbildung $\varphi\colon K_0 \to L_0$ heißt simpliziale Approximation der stetigen Abbildung $f\colon |K| \to |L|$, wenn für jeden Punkt $x \in |K|$ die Bildpunkte $f(x)$ und $|\varphi|(x)$ in einem gemeinsamen Simplex von L liegen.

Lemma: Jede stetige Abbildung $f\colon |K| \to |L|$ zwischen zwei kompakten Polyedern hat eine simpliziale Approximation $\varphi\colon K^{(n)} \to L$ für hinreichend großes n.

Beweis: $\mathcal{U} = \{\mathrm{st}_L(P) \mid P \in L_0\}$ ist eine offene Überdeckung von $|L|$. Die Urbilder der Überdeckungsmengen unter f bilden eine offene Überdeckung der kompakten Teilmenge $|K|$ von $\mathbb{R}^N$; deren LEBESGUE-Zahl sei δ. Wie im letzten Schritt gibt es dann ein n, so daß $\mu(K^{(n)}) < \delta/2$ ist, und wir können eine Abbildung $\varphi\colon K_0^{(n)} \to L_0$ definieren, indem wir $P \in K_0$ abbilden auf irgendein $Q \in L_0$ mit

$$\mathrm{st}_{K^{(n)}}(P) \subset f^{-1}\big(\mathrm{st}_L(Q)\big).$$

Dies ist eine simpliziale Abbildung, denn sind $P_0, \ldots, P_q$ Ecken eines Simplex aus $K^{(n)}$, so haben die Sterne $\mathrm{st}_{K^{(n)}}(P)$ nichtleeren Durchschnitt, und dieser Durchschnitt liegt im Durchschnitt der Urbilder $f^{-1}\big(\mathrm{st}_L(\varphi(P_i))\big)$, so daß auch dieser Durchschnitt und damit der Durchschnitt der $\mathrm{st}_L\big(\varphi(P_i)\big)$ nicht leer ist; die $\varphi(P_i)$ sind also Ecken eines Simplex aus L.

Schließlich ist φ auch eine simpliziale Approximation von f, denn liegt $x \in |K|$ im von $P_0, \ldots, P_q$ aufgespannten Simplex, so liegt x im Durchschnitt der Sterne der P_i in $K^{(n)}$, also liegt $f(x)$ nach Konstruktion von φ im Durchschnitt der Sterne der $\varphi(P_i)$ in L, also im Simplex, das von $\varphi(P_0), \ldots \varphi(P_q)$ aufgespannt wird, und genau dort liegt nach Konstruktion auch $|\varphi|(x)$.

■

Satz: Zu jeder stetigen Abbildung $f: X \to Y$ zwischen zwei Polyedern gibt es eindeutig bestimmte Homomorphismen

$$f_{*q}: H_q(X) \to H_q(Y)$$

für alle q. Ist $g: Y \to Z$ eine weitere stetige Abbildung nach einem Polyeder Z, so ist $(g \circ f)_{*q} = g_{*q} \circ f_{*q}$. Ist f ein Homöomorphismus, so sind alle f_{*q} Isomorphismen.

Beweis: K, L seien simpliziale Komplexe, die X und Y triangulieren, und $\varphi: K^{(n)} \to L$ sei eine simpliziale Approximation von f. Wir setzen $f_{*q} = \varphi_{*q}$ und müssen zeigen, daß diese Abbildungen nicht von K, L, n und φ abhängen.

Die Unabhängigkeit von φ bei gegebenem K, L und n ist klar: Zwar ist die Definition von φ im obigen Beweis alles andere als eindeutig, aber zwei verschiedene Wahlen von φ sind benachbart und liefern daher die gleichen Homomorphismen auf der Homologie. Auch die Unabhängigkeit von n folgt dann sofort, da man mit SPERNER-Abbildungen leicht von einem n zu einem größeren kommen kann.

Ersetzt man K und L durch andere Triangulierungen, so haben diese nach den Ergebnissen des letzten Schritts gemeinsame Verfeinerungen mit K beziehungsweise L, es genügt also, eine Verfeinerung $\tilde{K}$ von K und eine Verfeinerung $\tilde{L}$ von L zu betrachten und zu zeigen, daß eine simpliziale Approximation $\psi : \tilde{K}^{(m)} \to \tilde{L}$ die gleichen Homomorphismen definiert. Dies ist aber klar nach dem letzten Schritt.

Die Formel $(g \circ f)_{*q} = g_{*q} \circ f_{*q}$ ist ebenfalls (ziemlich) klar, und da die Identitäten auf X und Y natürlich identische Abbildungen auf den Homologiegruppen induzieren, folgt auch, daß Homöomorphismen zwischen topologischen Räumen Isomorphismen zwischen den Homologiegruppen induzieren.

■

Damit können wir definieren

Definition: Falls es zu dem topologischen Raum X einen abstrakten simplizialen Komplex K gibt, so daß X homöomorph zu |K| ist, definieren wir die q-te Homologiegruppe von X als

$$H_q(X) \underset{\text{def}}{=} H_q(\mathrm{K}).$$

Ist Y ein weiterer topologischer Raum, der homöomorph zur topologischen Realisierung eines simplizialen Komplexes L sei, und ist $f: X \to Y$ eine stetige Abbildung, so definieren wir lineare Abbildungen

$$f_{*q}: H_q(X) \to H_q(Y)$$

wie folgt: $|K|$ und $|L|$ seien geometrische Realisierungen von K und L; dann gibt es Homöomorphismen $\rho: |K| \to X$ und $\sigma: Y \to |L|$, die zusammen mit f eine stetige Abbildung

$$g = \sigma \circ f \circ \rho : |K| \to |L|$$

ergeben. Diese Abbildung hat nach dem gerade bewiesenen Satz eine simpliziale Approximation $\varphi: K^{(n)} \to L$, und wir setzen $f_{*q} = \varphi_{*q}$.

Man kann sich leicht (wenn auch umständlich) davon überzeugen, daß f_{*q} nur von f abhängt.

Die Gruppen $H_q(X)$ sind für kompaktes X bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt, und das soll uns ausreichen. Mit etwas mehr Aufwand kann man für beliebige topologische Räume Homologiegruppen definieren, wobei man zeigen kann, daß sie für kompakte triangulierbare Räume mit den hier definierten übereinstimmen.

Natürlich kann man die Homologiegruppen eines kompakten triangulierbaren topologischen Raums X auch dadurch ausrechnen, daß man einen geometrischen simplizialen Komplex K betrachtet mit $|K|$ homöomorph zu X und dann die Homologie von K berechnet.

Korollar: Für jede Triangulierung des Torus mit e Ecken, k Kanten und f Dreiecken ist $e - f + k = 0$.

■

Kapitel 7
Anwendungen der Homologietheorie

Als erste und elementarste Anwendung möchte ich zeigen, daß Dimensionen zumindest bei „gutartigen“ topologischen Räumen nur von der Homöomorphieklasse des Raums abhängen. Beginnen wir mit den Sphären. Die n-Sphäre S^n läßt sich triangulieren durch einen Komplex K, der aus den sämtlichen Randsimplizes eines $(n + 1)$-Simplex s besteht. Ist L der Komplex, der zusätzlich auch noch das Simplex s enthält, so hat L nach dem Korollar aus Schritt 2 im vorigen Paragraphen triviale Homologie. Für $q < n$ ist aber $H_q(K) = H_q(L)$, denn K und L haben für $i \leq n$ genau die gleichen i-Ketten, und auch die Randoperatoren sind gleich. Für $q = n$ ist in L wegen dessen trivialer Homologie $Z_n(L) = B_n(L)$, d.h. $Z_n(L)$ wird erzeugt vom Rand ∂s von s. Da $Z_n(L) = Z_n(K)$ ist, K aber keine n-Ränder hat, ist also $H_n(K) \cong \mathbb{Z}$ und wir erhalten

Lemma: Die n-Sphäre S^n hat für $n \geq 1$ die Homologiegruppen

$$H_q(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } q = 0 \text{ und } q = n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

■

Korollar: Die Sphären S^n und S^m sind nur dann homöomorph, wenn $n = m$ ist.

Beweis: Falls zwei topologische Räume homöomorph sind, haben sie isomorphe Homologiegruppen; dies ist aber für Sphären positiver Dimension nach dem Lemma nur für $n = m$ möglich. Die 0-Sphäre kann zu keiner Sphäre positiver Dimension homömorph sein, da sie endlich (und auch nicht zusammenhängend) ist.

■

Korollar: $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ sind für $n \neq m$ nicht homöomorph.

Beweis: Wären $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ isomorph, so wären es auch ihre ALEXANDROFF-Kompaktifizierungen (*s.* 7. Übungsblatt, Aufgabe 1). Die ALEXANDROFF-Kompaktifizierung von $\mathbb{R}^n$ mit $n > 0$ ist aber die n-Sphäre S^n: Identifiziert man den Nordpol N von S^n mit dem Punkt ∞, so wird $S^n \setminus \{N\}$ über die stereographische Projektion homöomorph zu $\mathbb{R}^n$. Damit folgt die Behauptung für positives n aus dem gerade bewiesenen Lemma, und $\mathbb{R}^0$ als einpunktige Menge kann natürlich nicht homöomorph zu einem anderen $\mathbb{R}^n$ sein. ∎

Dieses Korollar läßt sich leicht dahingehend verallgemeinern, daß man für größere Klassen topologischer Räume einen unter Homöomorphie invarianten Dimensionsbegriff erklären kann; für uns sind jedoch andere Fragen wichtiger, so daß ich nicht näher darauf eingehen möchte.

Eine zweite wichtige Anwendung der Homologietheorie sind Fixpunktsätze. Ein möglicher Zugang dazu ist der HOPFsche Spursatz, der den EULERschen Polyedersatz verallgemeinert. Um ihn zu formulieren, müssen wir zunächst für Homomorphismen von abelschen Gruppen eine Spur definieren, ähnlich zur Spur einer linearen Abbildung zwischen Vektorräumen. Da wir uns auf endliche Komplexe beschränken, reicht es, diese Spur für endlich erzeugbare abelsche Gruppen zu definieren; sei also A eine endlich erzeugbare abelsche Gruppe, und sei $f\colon A \to A$ ein Homomorphismus. Weiter sei $\{v_1, \ldots, v_r\}$ eine maximale linear unabhängige Teilmengen von A. Dann sind die $f(v_i)$ nicht notwendigerweise darstellbar als Linearkombinationen der v_i, denn $f(v_i)$ könnte endliche Ordnung haben, also schon für sich alleine linear abhängig sein. Auf jeden Fall ist aber ein ganzzahliges Vielfaches $n_i f(v_i)$ eine Linearkombination der v_i, denn sonst wäre $\{v_1, \ldots, v_r, f(v_i)\}$ eine linear unabhängige Menge. Daher können wir schreiben

$$n_i f(v_i) = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} v_j.$$

Falls $f(v_i)$ endliche Ordnung hat, ist dabei natürlich $n_i f(v_i) = 0$, also verschwindet $a_{ij} = 0$ für alle j. Offensichtlich sind die Quotienten

$c_{ij} = a_{ij}/n_i$ unabhängig von der Wahl von n_i, die Matrix (c_{ij}) hängt also nur ab von f und wir bezeichnen ihre Spur als Spur von f:

$$\text{Spur}(f) \underset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{r} c_{ii} = \sum_{i=1}^{r} a_{ii}/n_i \ .$$

Dies ist gerade die Spur jener Abbildung $\tilde{f}$, die aus f entsteht durch Fortsetzung auf den $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $\{v_1, \ldots, v_r\}$, sie entspricht also dem, was wir aus der linearen Algebra gewohnt sind. Aus diesem Grund ist sie auch unabhängig von der Wahl der v_i, denn die Spur einer linearen Abbildung zwischen Vektorräumen ist die Summe der Eigenwerte dieser Abbildung und damit unabhängig von der Basis.

Definition: $f\colon X \to X$ sei eine stetige Selbstabbildung des kompakten triangulierbaren Raums X, und f_{*q} seien die auf der Homologie von X induzierten linearen Abbildungen. Die LEFSCHETZ-Zahl von f ist

$$\Lambda(f) = \sum_{q\geq 0}(-1)^q \text{Spur}(f_{*q}).$$

In völliger Analogie zum Beweis des EULERschen Polyedersatzes folgt nun der

Spursatz von HOPF**:** $\varphi\colon \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(K)$ sei eine simpliziale Selbstabbildung des endlichen simplizalen Komplexes K. Dann ist

$$\sum_{q\geq 0}(-1)^q \text{Spur}(\varphi_q) = \Lambda(|\varphi|).$$

Beweis: Zunächst überlegt man sich leicht, daß jeder Homomorphismus abelscher Gruppen $h\colon A \to A$, der die Untergruppe B auf sich selbst abbildet, ein Homomorphismus $\bar{h}\colon A/B \to A/B$ induziert und daß gilt

$$\text{Spur}(h) = \text{Spur}(h_{|B}) + \text{Spur}(\bar{h}).$$

Nun geht alles genauso weiter wie beim EULERschen Polyedersatz: Da $Z_q(\text{K})$ der Kern von ∂_q ist und $B_{q-1}(\text{K})$ das Bild, ist

$$C_q(\text{K})/Z_q(\text{K}) \cong B_{q-1}(\text{K}),$$

also

$$\text{Spur}(\varphi_q) = \text{Spur}(\varphi_{q|Z_q(\text{K})}) + \text{Spur}(\varphi_{q-1|B_{q-1}(\text{K})}),$$

und auf Grund der Definition $H_q(\text{K}) = Z_q(\text{K})/B_q(\text{K})$ ist

$$\begin{aligned}\text{Spur}(\varphi_{q|Z_q(\text{K})}) &= \text{Spur}(\ \varphi_{*q}\ ) + \text{Spur}(\varphi_{q|B_q(\text{K})}) \\ &= \text{Spur}(|\varphi|_{*q}) + \text{Spur}(\varphi_{q|B_q(\text{K})}).\end{aligned}$$

Mithin ist

$$\text{Spur}(|\varphi|_{*q}) = \text{Spur}(\varphi_q) - \text{Spur}(\varphi_{q-1|B_{q-1}(\text{K})}) - \text{Spur}(\varphi_{q|B_q(\text{K})}),$$

wobei formal $B_{-1}(\text{K}) = 0$ zu setzen ist. Bildet man die alternierende Summe, so heben sich wegen $B_n(\text{K}) = 0$ die Spuren auf den Gruppen der Ränder gerade weg, womit die Behauptung gezeigt wäre. ∎

Der folgende Satz erlaubt es in vielen Fällen, die Existenz eines Fixpunkts zu zeigen:

Satz: Falls die stetige Selbstabbildung $f\colon X \to X$ des kompakten triangulierbaren Raums X keinen Fixpunkt hat, ist $\Lambda(f) = 0$.

Beweis: K sei ein geometrischer simplizialer Komplex, der X trianguliert, und g sei die durch den Homöomorphismus $X \to |K|$ induzierte stetige Selbstabbildung $|K| \to |K|$. Dann hat auch g keinen Fixpunkt, für jeden Punkt $P \in |K|$ ist also der Abstand $d\big(P, g(P)\big)$ positiv. Da $|K|$ kompakt ist, gibt es daher eine Zahl $\epsilon > 0$, so daß $d\big(P, g(P)\big) \geq \epsilon$ für alle $P \in |K|$. Indem wir zu einer baryzentrischen Unterteilung von K übergehen, können wir o.B.d.A. annehmen, daß die Maschenweite von K kleiner als $\epsilon/3$ ist.

Wie wir aus dem letzten Paragraphen wissen, hat g für hinreichend großes r eine simpliziale Approximation $\varphi\colon K^{(r)} \to K$, und damit gibt es auch Gruppenhomomorphismen

$$\varphi_q\colon C_q(K^{(r)}) \to C_q(K).$$

Im fünften Schritt der Konstruktion aus S10 haben wir zur SPERNER-Abbildung $\omega\colon K' \to K$ eine Kettenabbildung $C_q(K) \to C_q(K')$

definiert, die im wesentlichen jedem Simplex die Summe seiner Unterteilungssimplizes zuordnet; wenn wir mit r solchen Abbildungen schachteln, erhalten wir aus φ eine Kettenabbildung $\psi\colon \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(K)$, die auf der Homologie diesselbe Abbildung induziert wie φ. Wir wollen einsehen, daß Spur(ψ_q) für alle q verschwindet; daraus folgt dann natürlich sofort die Behauptung des Satzes.

Sei also t ein q-Simplex aus K und P ein Punkt aus t. Da die Maschenweite von K kleiner als $\epsilon/3$ ist und φ die Abbildung g simplizial approximiert, ist $d\big(|\varphi|(P), g(P)\big) < \epsilon/3$. Andererseits ist nach Definition von ϵ der Abstand $d\big(P, g(P)\big) > \epsilon$, also $d\big(P, |\varphi|(P)\big) > 2\epsilon/3$. Für einen beliebigen Punkt Q aus t, dessen Abstand von P ja höchstens $\epsilon/3$ sein kann, ist also immer noch $d\big(Q, |\varphi|(P)\big) > \epsilon/3$, daher ist $|\varphi|(t) \cap t = \emptyset$. Damit ist auch für jedes Simplex s aus $K^{(r)}$, das in t liegt, $|\varphi|(s) \cap t = \emptyset$, also ist $\varphi_q(s) \neq t$ und t tritt nicht auf in der Kette $\psi_q(t)$, die ja gerade die Summe der $\varphi_q(s)$ ist. Also kommt kein Simplex t aus K in $\psi_q(t)$ vor, der entsprechende Koeffizient in der Diagonale der Matrix von ψ_q ist also stets Null, und damit verschwindet auch die Spur von ψ_q, wie behauptet.

■

Als unmittelbare Anwendung erhalten wir den

Fixpunktsatz von BROUWER**:** Jede stetige Abbildung $f\colon B^n \to B^n$ der Kugel auf sich selbst hat mindestens einen Fixpunkt.

Beweis: Da $H_q(B^n) = 0$ für $q > 0$, ist $\Lambda(f)$ gleich der Spur von f_{*0} auf $H_0(B^n) \cong \mathbb{Z}$. Ist aber $\varphi\colon K^{(r)} \to K$ eine simpliziale Approximation von f, so wird $H_0(K)$ erzeugt von der Homologieklasse irgendeiner Ecke P aus K, und $\varphi_{*0}([P]) = [\varphi_0(P)] = [P]$, da je zwei Ecken durch einen Kantenzug in K verbunden werden können. Daher ist φ_{*0} die Identität und hat somit Spur eins, also ist $\Lambda(f) = 1$ von Null verschieden, und der Satz folgt aus dem davor bewiesenen.

■

Auch für die Sphäre ist $H_0(\mathrm{S}^n) \cong \mathbb{Z}$, und für jede Abbildung $f\colon \mathrm{S}^n \to \mathrm{S}^n$ ist f_{*0} die Identität, hat also Spur eins. Die einzige weitere nichttriviale

Homologiegruppe ist $H_n(\mathrm{S}^n) \cong \mathbb{Z}$; sie wird erzeugt von der Klasse c der Summe aller n-Simplizes eines Komplexes, der S^n trianguliert.

Definition: Der Grad $\deg(f)$ einer stetigen Abbildung $f\colon \mathrm{S}^n \to \mathrm{S}^n$ ist jene ganze Zahl, für die $f_{*n}(c) = \deg(f) \cdot c$ ist.

Dann folgt natürlich sofort

Satz: Die LEFSCHETZ-Zahl einer stetigen Abbildung $f\colon \mathrm{S}^n \to \mathrm{S}^n$ ist $\Lambda(f) = 1 + (-1)^n \deg(f)$; falls f keinen Fixpunkt hat, ist also $\deg(f) = (-1)^{n+1}$.

■

Ein einfaches Beispiel einer fixpunktfreien Abbildung $f\colon \mathrm{S}^n \to \mathrm{S}^n$ ist die *Antipoden-Abbildung,* die jedem Punkt sein Bild unter der Spiegelung am Mittelpunkt der Kugel zuordnet. Diese Abbildung hat offensichtlich keinen Fixpunkt auf S^n, ihr Grad ist also $(-1)^{n+1}$.

Satz: Eine stetige Abbildung $f\colon \mathrm{S}^n \to \mathrm{S}^n$ mit $\deg(f) \neq 0$ ist surjektiv.

Beweis: Angenommen, f sei nicht surjektiv. Da $f(\mathrm{S}^n)$ auf jeden Fall kompakt ist, gibt es dann eine abgeschlossene Teilmenge $A \subset \mathrm{S}^n$ mit positivem Durchmesser δ, so daß A nicht im Bild liegt. Der Komplex K sei eine Triangulierung von S^n mit Maschenweite kleiner $\delta/3$, und c sei die Summe aller n-Simplizes aus K. Dann folgt genau wie beim Beweis, daß $\Lambda(f) = 0$ für fixpunktfreie Abbildungen, daß es in A ein n-Simplex gibt, das nicht in der Kette $f_{*n}(c)$ auftritt. Da $f_{*n}(c)$ aber jedes n-Simplex mit gleicher Vielfachheit enthält, muß $f_{*n}(c) = 0$ sein, also $\deg(f) = 0$, wie behauptet.

■

Als Beispiel können wir etwa ein Polynom n-ten Grades

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \quad a_n \neq 0$$

mit komplexen Koeffizienten a_i betrachten. Die dadurch definierte Abbildung $f\colon \mathrm{C} \to \mathrm{C}$ läßt sich fortsetzen zu einer stetigen Abbildung $\hat{f}\colon \widehat{\mathrm{C}} \to \widehat{\mathrm{C}}$ der RIEMANNschen Zahlenkugel $\widehat{\mathrm{C}} = \mathrm{C} \cup \{\infty\}$; diese wiederum ist homöomorph zu S^2. Falls wir nun wüßten, daß $\deg(\hat{f}) \neq 0$ ist, würde folgen, daß $\hat{f}$ surjektiv ist, insbesondere würde also der Wert

Null angenommen, und das bedeutet wegen $\hat{f}(\infty) = \infty$, daß f eine Nullstelle hat – wir hätten also den Fundamentalsatz der Algebra bewiesen.

Für das spezielle Polynom $f(z) = a_n z^n$ können wir den Grad leicht ausrechnen: Da die Gleichung $z^n = w/a_n$ für $w \neq 0$ genau n Lösungen hat, ist in diesem Fall $\deg(f) = n$. Für ein beliebiges Polynom n-ten Grades können wir nur dann so argumentieren, wenn wir den Fundamentalsatz der Algebra voraussetzen; für seinen Beweis müssen wir uns also etwas anderes einfallen lassen.

Die neue Idee ist folgende: Wir können ein beliebiges Polynom

$$f = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

vom Grad n deformieren in das spezielle Polynom $a_n z^n$ durch die Abbildung

$$F: \begin{cases} [0,1] \times \mathcal{C} \to \mathcal{C} \\ \qquad (t,z) \mapsto t a_n z^n + (1-t) f(z), \end{cases}$$

für die $F(0,z) = f(z)$ und $F(1,z) = a_n z^n$ ist für alle z. Diese Abbildung kann fortgesetzt werden zu einer stetigen Abbildung

$$F: [0,1] \times \widehat{\mathcal{C}} \to \widehat{\mathcal{C}},$$

wobei $F(t,\infty) = \infty$ für alle t: Um deren Stetigkeit in ∞ zu zeigen, können wir einfach die Kugel am Äquator spiegeln und dadurch ∞ mit Null vertauschen; die Funktion, deren Stetigkeit im Nullpunkt für alle t dann nachzurechnen ist, ist

$$\begin{aligned} G(t,w) &= \frac{1}{t a_n w^{-n} + (1-t) f(1/w)} \\ &= \frac{w^n}{a_n + (1-t)(a_{n-1} w + \cdots + a_0 w^n)}, \end{aligned}$$

und diese Funktion ist wegen $a_n \neq 0$ in der Tat stetig in der Umgebung eines jeden Punktes $(t,0)$.

Wenn wir zeigen können, daß sich der Grad bei einer solchen Deformation nicht ändert, ist der Fundamentalsatz der Algebra bewiesen. Diese

Invarianz des Grades wollen wir gleich etwas allgemeiner beweisen; der Homotopiebegriff, den wir dazu einführen, wird uns auch noch für andere Anwendungen nützlich sein.

Definition: Zwei stetige Abbildungen $f, g: X \to Y$ zwischen zwei topologischen Räumen X und Y heißen homotop, in Zeichen $f \simeq g$, wenn es eine stetige Abbilung $F: [0,1] \times X \to Y$ gibt, so daß gilt: $F(0,x) = f(x)$ und $F(1,x) = g(x)$ für alle $x \in X$.

Satz: X und Y seien kompakte triangulierbare topologische Räume, und $f, g: X \to Y$ seien zueinander homotope stetige Abbildungen. Dann ist $f_{*q} = g_{*q}$ für alle q.

Beweis: Wir können o.B.d.A. annehmen, daß X und Y Polyeder sind; sie seien gegeben durch die geometrischen simplizialen Komplexe K und L. Weiter sei δ die LEBESGUE-Zahl zur Überdeckung von Y durch die Sterne der Ecken von L; da die Abbildung $F: [0,1] \times X \to Y$ stetig ist auf einer kompakten Menge, ist sie gleichmäßig stetig, es gibt also ein $\epsilon > 0$, so daß gilt

$$|t_2 - t_1| < \epsilon \Rightarrow |F(x,t_2) - F(x,t_1)| < \delta/3 \quad \text{für alle } x \in X.$$

Wir wählen eine Unterteilung

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = 1$$

des Einheitsintervalls derart, daß $|t_i - t_{i-1}| < \epsilon$ für $i = 1, \ldots, n$ und setzen $f_i(x) = F(t_i, x)$ für alle i. Natürlich genügt es, wenn wir zeigen, daß $(f_{i-1})_{*q} = (f_i)_{*q}$ für alle i und q.

Setzen wir der Einfachheit halber $h = f_{i-1}$ und $k = f_i$; nach Konstruktion ist $|k(x) - h(x)| < \delta/3$ für alle x.

Die Behauptung, daß $h_{*q} = k_{*q}$ für alle q, folgt natürlich sofort, wenn wir wissen, daß h und k eine gemeinsame simpliziale Approximation haben, und genau das soll nun gezeigt werden:

$Q_1, \ldots, Q_\ell$ seien die Ecken von L. Dann haben wir zu jedem Q_i den Stern $\mathrm{st}(Q_i)$, und darin die offene Teilmenge

$$V_i = \{Q \in Y \mid d\big(Q, |L| \setminus \mathrm{st}(Q_i)\big) > \delta/3\},$$

die aus allen jenen Punkten des Sterns besteht, die einen hinreichend großen Abstand vom Rand des Stern haben. Die V_i sind immer noch groß genug, um ganz Y zu überdecken: Ist nämlich Q ein beliebiger Punkt von Y, so hat die abgeschlossene $\delta/3$-Umgebung von Q einen Durchmesser kleiner δ, liegt also nach Wahl von δ ganz in einem der Sterne st(Q_j) , und ihr Mittelpunkt Q hat somit mindestens den Abstand $\delta/3$ von jedem Punkt aus Y, der nicht in st(Q_j) liegt.

Da die V_i somit eine Überdeckung von Y bilden, bilden ihre Urbilder $h^{-1}(V_i)$ eine offene Überdeckung von X; deren LEBESGUE-Zahl sei ϵ. Dazu gibt es, wie wir im letzten Paragraphen gesehen haben, eine baryzentrische Unterteilung $K^{(n)}$ von K, deren Maschenweite kleiner ist als ϵ. Wir approximieren h durch eine simpliziale Abbildung $\varphi\colon K^{(n)} \to L$, die jeder Ecke P aus $K^{(n)}$ irgendeine Ecke Q_i von L zuordnet, so daß st(P) $\subset h^{-1}(V_i)$ ist. Diese Abbildung ist auch eine simpliziale Approximation von k, denn da $h(P)$ und $\varphi(P)$ beide in V_i liegen und $k(P)$ höchstens den Abstand $\delta/3$ von $h(P)$ hat, liegt auch $k(P)$ im Stern von $Q_i = \varphi(P)$. Damit ist der Satz bewiesen. ∎

Damit zurück zum Fundamentalsatz der Algebra: Ein Polynom

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \quad a_n \neq 0$$

vom Grad n, aufgefaßt als Funktion auf der RIEMANNschen Zahlenkugel, ist – wie wir schon vor der Definition des Homotopiebegriffs gesehen haben – homotop zur Abbildung $z \mapsto a_n z^n$ vom Grad n, hat also auch topologisch den Grad $n \neq 0$ und ist somit surjektiv. Insbesondere folgt der

Fundamentalsatz der Algebra: Jedes Polynom positiven Grades mit komplexen Koeffizienten hat mindestens eine komplexe Nullstelle. ∎

Doch nun zu den eigentlichen Anwendungen der Homotopie! Als erstes erlaubt sie es uns, eine größere „Deformationsinvarianz“ der Homologie zu zeigen, als wir sie bislang kennen:

Definition: Zwei topologische Räume X und Y heißen homotop, in Zeichen $X \simeq Y$, falls es stetige Abbildungen $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to X$ gibt, so daß $g \circ f$ homotop zur Identität von X ist und $f \circ g$ homotop zur Identität von Y. Ein topologischer Raum X heißt zusammenziehbar, wenn er homotop zum einpunktigen topologischen Raum ist.

Falls wir anstelle der Homotopie zur Identität Gleichheit verlangt hätten, wäre dies gerade die Definition der Homöomorphie, Homöomorphie ist also ein Spezialfall der Homotopie. Homotopie ist allerdings sehr viel allgemeiner; beispielsweise gilt

Lemma: Die n-dimensionale Vollkugel B^n ist zusammenziehbar.

Beweis: f sei die Identität von

$$B^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\},$$

und g sei die konstante Abbildung, die jeden Punkt auf den Nullpunkt abbildet. Dann ist $f \circ g$ die Identität auf der einpunktigen Menge, und $g \circ f = g$ ist homotop zur Identität auf B^n via $F(t, x) = tx$. ∎

Genauso überlegt man sich leicht, daß auch jeder $\mathbb{R}^n$ zusammenziehbar ist, nicht aber beispielsweise eine Sphäre, denn natürlich gilt

Satz: Homotope topologische Räume haben isomorphe Homologiegruppen; insbesondere haben zusammenziehbare topologische Räume triviale Homologie. ∎

Dieser Satz läßt sich häufig anwenden, um die Berechnung von Homologiegruppen zu vereinfachen. Betrachten wir etwa den Zylinder und das MOEBIUSband. Beide sind definiert als Quotienten des Quadrats, das wir hier am besten in der Form

$$Q = [0, 1] \times [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}]$$

darstellen; für den Zylinder wird der Punkte $(0, y)$ identifiziert mit $(1, y)$, für das Moebiusband mit $(1, -y)$. Beide topologische Räume enthalten die Kreislinie als die durch $y = 0$ definierte Teilmenge, und beide sind

homotop zur Kreislinie, wie man sich leicht überzeugt anhand der Abbildung

$$F\big(t,(x,y)\big) = (x,ty).$$

Also haben beide Räume dieselbe Homologie wie S^1, die nullte und erste Homologiegruppe sind also isomorph zu $\mathbb{Z}$, und alle anderen sind Null.

Eine weitere Anwendung des gerade bewiesenen Satzes ist eine Verallgemeinerung des BROUWERschen Fixpunktsatzes:

Satz: Für ein zusammenziehbares Polyeder X hat jede stetige Abbildung $f\colon X \to X$ mindestens einen Fixpunkt.

Beweis: Da X zusammenziehbar ist, ist $H^0(X) \cong \mathbb{Z}$, und alle höheren Homologiegruppen verschwinden. Also können wir wörtlich genauso argumentieren wie beim BROUWERschen Fixpunktsatz. ∎

Zum Abschluß betrachten wir noch eine weitere Anwendung der Homotopie auf Abbildungen von Sphären, die auch wieder vor allem für die Algebra interessant ist. Ausgangspunkt dazu ist der

Satz: Für gerade Dimensionen n gibt es keine stetige Abbildung $f\colon S^n \to S^n$ derart, daß die Ortsvektoren von x und $f(x)$ für jeden Punkt $x \in S^n$ aufeinander senkrecht stehen.

Beweis: Angenommen, es gäbe eine solche Abbildung f. Wir betrachten S^n als Einheitskugel in $\mathbb{R}^{n+1}$. Dann hat der Vektor

$$F(t,x) = (1-t)f(x) + tx \in \mathbb{R}^{n+1}$$

die Länge $(1-t)^2 + t^2 > 0$,

$$G(t,x) = \frac{F(t,x)}{|F(t,x)|}$$

liegt also in S^n und vermittelt eine Homotopie zwischen f und der Identität. Da die Identität den Grad eins hat, ist auch

$$\deg(f) = 1 \neq (-1)^{n+1},$$

f hat also mindestens einen Fixpunkt, was wegen der Orthogonalität von x und $f(x)$ absurd ist.

■

Im Spezialfall $n = 2$ formuliert man dieses Resultat auch gelegentlich als

Satz vom Igel: Einen Igel kann man nicht kämmen.

In der Tat: Könnte man ihn kämmen, so wären die Stacheln in jedem Punkt parallel zur Schale, stünden also senkrecht auf dem Ortsvektor, und wir hätten eine der Abbildungen, deren Nichtexistenz wir gerade gezeigt haben.

■

Für ungerades n ist

$$f\colon \begin{cases} \mathrm{S}^n \to \mathrm{S}^n \\ (x_0, x_1, \ldots, x_{2j}, x_{2j+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n) \\ \qquad \mapsto (-x_1, x_0, \ldots, -x_{2j+1}, x_{2j}, \ldots, -x_n, x_{n-1}) \end{cases}$$

eine Abbildung, für die x und $f(x)$ in jedem Punkt aufeinander senkrecht stehen, hier gibt es also solche Abbildungen. Für die Algebra sehr interessant ist die Frage, ob es vielleicht sogar n Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ auf S^n gibt, so daß alle $f_i(x)$ senkrecht stehen auf x und auf allen $f_j(x)$ für $j \neq i$. In diesem Fall nennen wir S^n *parallelisierbar.* Geometrisch betrachtet bilden die $f_i(x)$ in diesem Fall in jedem Punkt $x \in \mathrm{S}^n$ eine Basis des Tangentialraums (den ich hier nicht definieren möchte).

Man kann leicht zeigen, daß $\mathrm{S}^1, \mathrm{S}^3$ und S^7 parallelisierbar sind, denn für $n = 1, 3$ und 7 lassen sich auf $\mathbb{R}^{n+1}$ eine „Multiplikation“ und eine „Division“ erklären: Für $\mathbb{R}^2$ ist das die komplexe Multiplikation, für $n = 4$ die (nicht mehr kommutative) Multiplikation der HAMILTONschen Quaternionen, und für $n = 8$ die (nicht einmal mehr assoziative) Multiplikation der CAYLEYschen Oktaven. Allgemein wollen wir unter einer Multiplikation eine bilineare Abbildung $\cdot\colon \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ verstehen mit der Eigenschaft, daß man durch jedes Element ungleich Null sowohl von links als auch von rechts dividieren kann

Gibt es eine solche Multiplikation, und ist $\{e_0, \ldots, e_n\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^{n+1}$, wobei o.B.d.A. $e_0 = 1$ sei, so sind für jeden Punkt $x \in \mathrm{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$

die Vektoren $e_i x$ linear unabhängig voneinander, denn ist

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \, e_i \cdot x = 0$$

für irgendwelche $\lambda_i \in \mathbb{R}$, so können wir durch x dividieren und erhalten $\sum \lambda_i e_i = 0$, was natürlich nur für $\lambda_i = 0$ möglich ist. Also bilden die $e_i x$ für jedes x eine Basis, die wir orthonormalisieren können zu einer Orthonormalbasis $\{f_0(x), \ldots, f_n(x)\}$, für die immer noch $f_0(x) = x$ ist und $f_i(x)$ stetig abhängt von x. Also folgt

Satz: S^1, S^3 und S^7 sind parallelisierbar. ∎

Umgekehrt folgt auch aus der Nichtparallelisierbarkeit von S^n für gerades $n > 0$ *(Was passiert für $n = 0$?)*

Satz: Für ungerades $n > 1$ kann man auf $\mathbb{R}^n$ keine Multiplikation erklären, zu der es auch eine Division gibt. Insbesondere läßt sich auf $\mathbb{R}^3$ keine solche multiplikative Verknüpfung erklären.

Denn wenn es eine solche Verknüpfung gäbe, könnten wir wie oben argumentieren und die Parallelisierbarkeit von S^{n-1} zeigen, obwohl es tatsächlich nicht einmal eine einzige Funktion $f(x)$ gibt, so daß $f(x)$ stets senkrecht auf x steht. ∎

Für gerades n kennen wir die Gegenbeispiele $n = 2, 4$ und 8, und damit muß die Algebra passen. Auf der *topologischen* Seite konnte aber HOPF 1940 zeigen, daß S^n nur dann parallelisierbar sein kann, wenn $n + 1$ eine Zweipotenz ist, und 1958 bewiesen KERVAIR und MILNOR unabhängig voneinander, daß sogar $n = 1, 3$ oder 7 sein muß. Damit ist mit topologischen Methoden gezeigt, daß es außer den drei bekannten keine weiteren Fortsetzungen der reellen Multiplikation auf einen $\mathbb{R}^n$ geben kann.

Kapitel 8
Der Fixpunktsatz von Kakutani

Im vorigen Kapitel haben wir gesehen, daß topologische Fixpunktsätze eine ganze Reihe von Anwendungen auf Probleme der Algebra, Geometrie und Analysis haben. Was uns in dieser Vorlesung besonders interessiert sind allerdings Anwendungen auf Gleichgewichte in einer Volkswirtschaft oder bei Spielen, und dazu reichen die bislang bewiesenen Sätze nicht aus. Das Hauptproblem besteht darin, daß beispielsweise ein Teilnehmer an einer Volkswirtschaft praktisch immer mehr als eine mögliche Strategie verfolgen kann; welche Strategien in Frage kommen, hängt beispielsweise ab vom Preisgefüge des betrachteten Systems.

Zur Modellierung einer solchen Situation reichen topologische Räume und stetige Abbildungen nicht aus: Die möglichen Strategien und auch die Preisniveaus lassen sich zwar in vielen Fällen als Punkte einer Teilmenge eines $\mathbb{R}^n$ betrachten und damit als Punkte eines topologischen Raums; wenn wir zu gegebenen Preisen die möglichen Strategien betrachten wollen, haben wir aber keine Abbildung zwischen zwei topologischen Räumen, sondern eine Abbildung, die jedem Punkt des einen Raumes eine *Teilmenge* des anderen zuordnet; ihr Zielraum ist also die Potenzmenge des zweiten Raums, und diese hat keine kanonische Struktur als topologischer Raum. Außerdem werden in den meisten Fällen nur sehr spezielle Teilmengen als Werte der Abbildung auftreten.

Deshalb wollen wir solche Vorschriften als eine Art verallgemeinerte Abbildungen zwischen den Räumen selbst betrachten; früher sprach man von „mehrdeutigen Abbildungen“, heute von Korrespondenzen:

Definition: *a)* Eine *Korrespondenz* $f\colon X \to\!\!\!\!\to Y$ zwischen zwei Mengen X und Y ist eine Abbildung, die jedem Element $x \in X$ eine

Teilmenge $f(x) \subseteq Y$ zuordnet.
b) Der *Graph* von f ist die Menge

$$\Gamma_f \underset{\text{def}}{=} \big\{(x,y) \in X \times Y \;\big|\; y \in f(x)\big\}\,.$$

c) Das *obere* oder *starke Urbild* einer Teilmenge $Z \subseteq Y$ ist die Menge

$$f^+(Z) \underset{\text{def}}{=} \big\{x \in X \;\big|\; f(x) \subseteq Z\big\}\,.$$

d) Das *untere* oder *schwache Urbild* einer Teilmenge $Z \subseteq Y$ ist die Menge

$$f^-(Z) \underset{\text{def}}{=} \big\{x \in X \;\big|\; f(x) \cap Z \neq \emptyset\big\}\,.$$

e) Ist $Z = \{z\}$ eine einelementige Menge, schreiben wir kurz $f^+(z)$ und $f^-(z)$ an Stelle von $f^+(Z)$ und $f^-(Z)$.

Offensichtlich ist das obere Urbild stets im unteren enthalten; falls alle Mengen $f(x)$ einelementig sind, stimmen beide überein und sind gleich der „üblichen“ Urbildmenge $f^{-1}\big(\{x\}\big)$.

Wir interessieren uns für Korrespondenzen zwischen topologischen Räumen und wollen auch für diese Stetigkeitseigenschaften definieren. Eine Abbildung zwischen zwei topologischen Räumen ist stetig, wenn das Urbild einer jeden offenen Menge wieder offen ist; da wir für Korrespondenzen zwei verschiedene Urbilder einer Menge definiert haben, ist die Situation hier offensichtlich komplexer:

Definition: *a)* Eine Korrespondenz $f\colon X \to\!\!\!\to Y$ zwischen zwei topologischen Räumen X und Y heißt *halbstetig nach oben,* wenn das obere Urbild $f^+(U)$ jeder offenen Teilmenge $U \subseteq Y$ offen in X ist.
b) f heißt *halbstetig nach unten,* wenn das untere Urbild $f^-(U)$ jeder offenen Teilmenge $U \subseteq Y$ offen in X ist.
c) f heißt *stetig,* wenn f sowohl halbstetig nach oben als auch halbstetig nach unten ist.

Als erstes, noch ziemlich uninteressantes Beispiel betrachten wir die Korrespondenz

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to\!\!\!\to \mathbb{R} \\ \qquad x \mapsto \begin{cases} [-1,\,1] & \text{falls } x \neq 0 \\ [-2,\,2] & \text{falls } x = 0 \end{cases} \end{cases}\,.$$

Sie ist offensichtlich halbstetig nach oben, denn für jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$, die das Intervall $[-1,\ 1]$ nicht enthält, ist $f^+(U) = \emptyset$; falls U zwar $[-1,\ 1]$ enthält, nicht aber $[-2,\ 2]$, so ist $f^+(U) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, und enthält U das Intervall $[-2,\ 2]$, so ist $f^+(U) = \mathbb{R}$. In allen drei Fällen ist das obere Urbild offen, womit die Halbstetigkeit nach oben bewiesen wäre.

f ist allerdings nicht halbstetig nach unten, denn für das offene Intervall $(1,\ 2)$ ist $f^-(U)$ die einelementige Menge $\{0\}$ und somit nicht offen.

Umgekehrt ist die Korrespondenz

$$g\colon \begin{cases} \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad x \mapsto \begin{cases} [-2,\ 2] & \text{falls } x \neq 0 \\ [-1,\ 1] & \text{falls } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

halbstetig nach unten, denn für jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$, die nichtleeren Durchschnitt mit $[-1,\ 1]$ hat, ist $g^-(U) = \mathbb{R}$; hat U nur nichtleeren Durchschnitt mit $[-2,\ 2]$, so ist $g^-(U) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, und im Falle $U \cap [-2,\ 2] = \emptyset$ schließlich ist $g^-(U) = \emptyset$. Da aber $f^+\big((-2,\ 2)\big)$ nur die Null enthält, ist f nicht halbstetig nach oben.

Für eine Korrespondenz $f\colon X \twoheadrightarrow Y$, für die alle Mengen $f(x)$ einelementig sind, stimmen obere und untere Urbilder überein und somit ist f genau dann halbstetig nach oben, wenn es halbstetig nach unten ist. Bezeichnet $h\colon X \to Y$ jene Funktion, für die $f(x) = \big\{h(x)\big\}$ ist, so ist beides offensichtlich äquivalent zur Stetigkeit von h. Die Halbstetigkeit von Korrespondenzen hat also nichts zu tun mit der Halbstetigkeit reeller Funktionen einer Veränderlichen. In der neueren englischsprachigen Literatur verwendet man daher im Falle der Korrespondenzen oft nicht mehr das auch in der Analysis gebräuchliche Wort *semicontinous,* sondern ersetzt die lateinische Vorsilbe *semi* durch die gleichbedeutende griechische Vorsilbe und sagt *hemicontinous.*

Im Funktionenfall läßt sich die Stetigkeit, zumindest für Funktionen auf 1-abzählbaren topologischen Räumen, auch über konvergente Folgen charakterisieren. Im Falle von Korrespondenzen müssen wir zusätzlich noch eine Bedingung an den Zielraum stellen; da dieser bei den uns

interessierenden Anwendungen stets kompakt ist, wollen wir uns nur mit dieser Situation beschäftigen:

Lemma: X und Y seien ein 1-abzählbare topologische Räume, Y sei kompakt, und $f\colon X \to\!\!\to Y$ sei eine Korrespondenz derart, daß $f(x)$ für jedes $x \in X$ abgeschlossen in Y ist.
a) f ist genau dann halbstetig nach oben, wenn gilt: Sind $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen aus X *bzw.* Y mit Grenzwerten x und y derart, daß $y_n \in f(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist auch $y \in f(x)$.
b) f ist genau dann halbstetig nach unten, wenn gilt: Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in X konvergente Folge mit Grenzwert x, so gibt es für jedes $y \in f(x)$ eine gegen y konvergente Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Y derart, daß $y_n \in f(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: a) Sei zunächst f halbstetig nach oben und seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen aus X *bzw.* Y mit Grenzwerten x und y derart, daß $y_n \in f(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für jede offene Menge $U \subseteq Y$, die Z enthält, ist $f^+(U)$ eine offene Umgebung von x. Da die Folge der x_n gegen x konvergiert, gibt es daher einen Index $N \in \mathbb{N}$, so daß $x_n \in f^+(U)$ für alle $n \geq N$; insbesondere liegt also $f(x_n)$ für alle $n \geq N$ in U. Erst recht liegen damit die Punkte y_n mit $n \geq \mathbb{N}$ in U.

$f(x)$ ist nach Voraussetzung eine abgeschlossene Menge im kompakten Raum Y und damit selbst kompakt. Läge y nicht in $f(x)$, gäbe es daher, wie wir am Ende von Kapitel 3 gesehen haben, offene Mengen U und V, so daß $f(x)$ in U läge, y in V und $U \cap V = \emptyset$. Wie wir gerade gesehen haben, gäbe es zu U einen Index N, so daß $y_n \in U$ für alle $n \geq N$; andererseits gäbe es wegen der Konvergenz der y_n gegen y einen Index M, so daß y_n für alle $y \geq M$ in V läge. Beides gleichzeitig ist offensichtlich unmöglich; somit muß y in $f(x)$ liegen.

Umgekehrt habe f die gerade bewiesene Eigenschaft; wir müssen zeigen, daß f halbstetig nach oben ist. Dazu sei $U \subseteq Y$ eine offene Menge; die Offenheit von $f^+(U)$ ist äquivalent zur Abgeschlossenheit des Komplements $Z = X \setminus f^+(U)$, und diese ist, wie wir gegen Ende von Kapitel 2 gesehen haben, für 1-abzählbare topologische Räume äquivalent dazu, daß jede konvergente Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen $z_n \in Z$ gegen ein Element von Z konvergiert.

Sei also $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Folge von Punkten aus Z mit Grenzwert $z \in X$; wir müssen uns überlegen, daß z in Z liegt.

Falls z nicht in Z liegt, liegt es in $f^+(U)$; das Bild $f(z)$ liegt dann also ganz in U. Da die z_n nicht in $f^+(Z)$ liegen, gibt es für jedes z_n ein $y_n \in f(z_n)$, das nicht in U liegt. Da Y kompakt ist, hat die Folge der y_n eine konvergente Teilfolge, die gegen $y \in Y$ konvergiere. Nach Voraussetzung ist dann $y \in f(z) \subseteq U$, und da U eine offene Umgebung von y ist, liegen ab einem gewissen Index auch alle Elemente der Teilfolge ab diesem Index in U. Dies widerspricht aber der Konstruktion der y_n. Somit ist Z abgeschlossen und $f^+(U)$ offen.

b) Nun sei f halbstetig nach unten, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in X gegen x konvergente Folge und $y \in f(x)$. Da Y 1-abzählbar ist, hat y eine abzählbare Umgebungsbasis

$$U_1 \supseteq U_2 \subseteq U_3 \cdots ;$$

wegen der Halbstetigkeit von f nach unten sind dann die Mengen $f^-(U_i)$ offene Umgebungen von x. Da die Folge der x_n gegen x konvergiert, gibt es für jedes $i \in \mathbb{N}$ einen Index n_i, so daß $x_n \in f^-(U_i)$ für alle $n \geq n_i$, d.h. $f(x_n) \cap U_i \neq \emptyset$. Wir wählen für jedes n mit $n_i \leq n < n_{i-1}$ ein $y_n \in f(x_n) \cap U_i$; für $n < n_1$ nehmen wir irgendein $y_n \in f(x_n)$. Dann konvergiert die Folge der y_n gegen y und $y_n \in f(x_n)$ für alle n.

Umgekehrt erfülle f diese Folgenbedingung; wir wollen zeigen, daß f dann halbstetig nach unten ist. Sei also $U \subseteq Y$ offen. Das untere Urbild $f^-(U)$ ist genau dann offen, wenn sein Komplement

$$Z = X \setminus f^-(U) = \left\{ x \in X \;\middle|\; f(x) \cap U = \emptyset \right\}$$

abgeschlossen ist, und das wiederum ist äquivalent dazu, daß jede in X konvergente Folge von Elementen aus Z gegen ein Element aus Z konvergiert.

Sei also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen aus Z mit Grenzwert $x \in X$. Falls x nicht in Z liegt, liegt x in $f^-(U)$, es gibt also ein Element $y \in f(x) \cap U$. Nach Voraussetzung gibt es dazu eine gegen y konvergente Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert y derart, daß $y_n \in f(x_n)$ für alle n. Wegen der Konvergenz dieser Folge gegen y, gibt es einen Index N, so daß

$y_n \in f^-(U)$ für alle $n \geq N$; für solche n ist also $f^-(U) \cap f(x_n) \neq \emptyset$, im Widerspruch zur Annahme $x_n \notin f^-(U)$. ∎

Die Halbstetigkeit nach oben läßt sich noch anders charakterisieren:

Lemma: $f\colon X \to\!\!\!\!\to Y$ sei eine Korrespondenz zwischen zwei 1-abzählbaren topologischen Räumen, Y sei kompakt und alle Bilder $f(x)$ abgeschlossen. f ist genau dann halbstetig nach oben, wenn der Graph

$$\Gamma_f = \big\{(x,y) \in X \times Y \;\big|\; y \in f(x)\big\}$$

abgeschlossen ist.

Beweis: Sei zunächst f halbstetig nach oben und (x_n, y_n) eine konvergente Folge von Punkten aus dem Graph. Ist $(x,y) \in X \times Y$ ihr Grenzwert, so konvergiert nach Definition der Produkttopologie die Folge der x_n gegen x und die der y_n gegen y. Außerdem ist $y_n \in f(x_n)$ für alle n, da die Paare im Graph liegen. Somit ist nach dem vorigen Lemma auch $y \in f(x)$, der Grenzwert (x,y) liegt also in Γ_f.

Umgekehrt sei Γ_f abgeschlossen, die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere in X gegen x und die Folge der $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere in Y gegen y; außerdem sei $y_n \in f(x_n)$ für alle n. Dann liegen die Paare (x_n, y_n) in Γ_f, also auch ihr Grenzwert (x,y). Damit ist $y \in f(x)$, was zu beweisen war. ∎

Nach diesen Vorbereitungen können wir uns an die Verallgemeinerung des BROUWERschen Fixpunktsatzes für Korrespondenzen machen; sie wurde 1941 von KAKUTANI veröffentlicht:

Fixpunktsatz von KAKUTANI**:** K sei der simpliziale Komplex bestehend aus einem r-Simplex s und dessen sämtlichen Randsimplizes, und $f\colon S \to\!\!\!\!\to S$ sei eine nach oben halbstetige Korrespondenz auf $S = |K|$. Dann gibt es einen Punkt $x_0 \in S$ mit $x_0 \in f(x_0)$.

Beweis: $K^{(n)}$ sei die n-te baryzentrische Unterteilung von K. Wir wählen für jede Ecke x von $K^{(n)}$ irgendeinen Punkt $y \in f(x)$ und bezeichnen dieses als $f_n(x)$. Dies definiert eine stetige Abbildung $f_n\colon S \to S$,

wenn wir jedem Punkt $x = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i x_i$ eines offenen q-Simplex mit Ecken $x_0, \ldots, x_q$ den Punkt $f_n(x) = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i f(x_i)$ zuordnen. Nach dem BROUWERschen Fixpunktsatz hat f_n einen Fixpunkt x_n.

Da S kompakt ist, hat die Folge der x_n eine konvergente Teilfolge $(x_{n_\nu})_{\nu \in \mathbb{N}}$; wir wollen uns überlegen, daß deren Grenzwert x_0 in seinem Bild $f(x_0)$ liegt, also der gesuchte Fixpunkt ist.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei Δ_n der Abschluß eines r-Simplex aus $K^{(n)}$, für das $x_n \in \Delta_n$ liegt; die Ecken von Δ_n seien $x_0^{(n)}, \ldots, x_r^{(n)}$. Da die Folge der Durchmesser der Simplizes Δ_n mit den Maschenweiten der $K^{(n)}$ gegen Null konvergiert, konvergieren die Teilfolgen $(x_i^{(n_\nu)})_{\nu \in \mathbb{N}}$ für alle i gegen x_0.

Das Bild $y_i^{(n)} = f(x_i^{(n)})$ liegt nach Konstruktion von f_n in der Menge $f(x_i^{(n)})$; ist $x_n = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i^{(n)} x_i^{(n)}$, so ist $f(x_n) = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i^{(n)} y_i^{(n)}$.

Wegen der Kompaktheit von S sowie des Einheitsintervalls hat die Teilfolge $(n_\nu)_\nu \in \mathbb{N}$ selbst eine Teilfolge, die wir zur Vermeidung dreifacher Indizes etwas schlampig mit $(n'_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ bezeichnen derart, sowohl die Teilfolgen $y_i^{(n'_\nu)}$ als auch die Teilfolgen $\lambda_i^{(n'_\nu)}$ konvergieren; die jeweiligen Grenzwerte seinen $y_i^{(0)}$ und $\lambda_i^{(0)}$. Dann ist $x_0 = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i^{(0)} y_i^{(0)}$. Da die Folgen der $x_i^{(n'_\nu)}$ allesamt gegen x_0 konvergieren und $y_i^{(n'_\nu)}$ in $f(x_i^{(n'_\nu)})$ liegt, zeigt die Halbstetigkeit von f nach oben, daß alle $y_i^{(0)}$ in $f(x_0)$ liegen, also ist

$$x_0 = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i^{(0)} y_i^{(0)} \in f(x_0)\,,$$

wie behauptet.

∎

Korollar: $f\colon S \to\!\!\!\to S$ sei eine nach oben halbstetige Korrespondenz auf der kompakten konvexen Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^m$. Dann gibt es einen Punkt $x \in S$, für den x_0 in $f(x_0)$ liegt.

Beweis: Als kompakte Teilmenge eines $\mathbb{R}^m$ ist S beschränkt; es gibt daher ein Simplex S', das S enthält. Wir bilden S' ab auf S wie folgt: z sei ein fester Punkt von S. Ein Punkt $x \in S'$ wird auf sich selbst

abgebildet, falls er bereits in S liegt; andernfalls wird er abgebildet auf den Schnittpunkt $\rho(x)$ der Strecke von x nach z mit dem Rand von S. Die so definierte Abbildung $\rho\colon S' \to S$ ist also die Identität auf S und bildet ganz S' stetig ab auf S. (Eine solche Abbildung heißt *Retraktion* von S' auf S.) Die Korrespondenz $S' \to S'$, die jedem Punkt $x \in S'$ die Menge $f\big(\rho(x)\big)$ ist offensichtlich halbstetig nach oben; nach dem gerade bewiesenen Satz gibt es also einen Punkt $x_0 \in S'$ mit $x_0 \in f\big(\rho(x_0)\big)$. Da letztere Menge in S liegt, liegt auch x_0 in S, also ist $\rho(x_0) = x_0$ und $x_0 \in f(x_0)$.

∎

Satz: $X \subset \mathbb{R}^m$ und $Y \subset \mathbb{R}^n$ seien kompakte und konvexe Mengen, und $U, V \subseteq X \times Y \subset \mathbb{R}^{m+n}$ seien abgeschlossene Teilmengen von $X \times Y$ derart, daß die Mengen

$$U_{x_0} = \big\{y \in Y \;\big|\; (x_0, y) \in U\big\} \quad \text{und} \quad V_{y_0} = \big\{x \in X \;\big|\; (x, y_0) \in V\big\}$$

für alle $x_0 \in X$ *bzw.* $y_0 \in Y$ nicht leer, abgeschlossen und konvex sind. Dann ist $U \cap V \neq \emptyset$.

Beweis: $S = X \times Y$ ist kompakt und konvex. Die Korrespondenz

$$f\colon \begin{cases} S \to\!\!\to S \\ (x, y) \mapsto V_y \times U_x \end{cases}$$

ist halbstetig nach oben, denn ihr Graph

$$\Gamma_f = \big\{(x_0, y_0, x, y) \in X \times Y \times X \times Y \;\big|\; (x, y) \in V_{y_0} \times U_{x_0}\big\}$$

ist homöomorph zur nach Voraussetzung abgeschlossene Menge $U \times V$: Die Bedingung $x \in V_{y_0}$ ist äquivalent zu $(x, y_0) \in U$ und $y \in U_{x_0}$ zu $(x_0, y) \in V$, also liegt (x_0, y_0, x, y) genau dann in Γ_f, wenn (x, y_0, x_0, y) in $U \times V$ liegt, und die Vertauschung von Koordinaten ist natürlich ein Homöomorphismus. Nach dem obigen Korollar gibt es daher einen Punkt $(x_0, y_0) \in X \times Y$, der in seiner Bildmenge $V_{y_0} \times U_{x_0}$ liegt. Damit ist $x_0 \in V_{y_0}$ und $y_0 \in U_{x_0}$, also $(x_0, y_0) \in U \cap V$.

∎

Minimax-Theorem: $X \subset \mathbb{R}^m$ und $Y \subset \mathbb{R}^n$ seien kompakt und konvex und $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion. Weiter seien für alle $x_0 \in X, y_0 \in Y$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die Mengen

$$\big\{y \in Y \;\big|\; f(x_0, y) \leq \alpha\big\} \quad \text{und} \quad \big\{x \in X \;\big|\; f(x, y_0) \geq \beta\big\}$$

konvex. Dann ist

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) = \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y)\,.$$

Zum *Beweis* betrachten wir die beiden Mengen

$$U = \big\{(x_0,y_0)\in X\times Y \;\big|\; f(x_0,y_0) = \min_{y\in Y} f(x_0,y)\big\}$$

und

$$V = \big\{(x_0,y_0)\in X\times Y \;\big|\; f(x_0,y_0) = \max_{x\in X} f(x,y_0)\big\}\,.$$

Da ein Funktionswert genau dann kleiner oder gleich dem Minimum ist, wenn er gleich dem Minimum ist und entsprechend beim Maximum, sind U und V konvexe Mengen, haben also nach dem vorigen Satz nichtleeren Durchschnitt. Für $(x_0,y_0)\in U\times V$ ist dann

$$f(x_0,y_0) = \min_{y\in Y} f(x_0,y) = \max_{x\in X} f(x,y_0)\,,$$

also ist

$$\begin{aligned}\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) &\le \max_{x\in X} f(x,y_0) = f(x_0,y_0) = \min_{y\in Y} f(x_0,y)\\ &\le \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y)\,,\end{aligned}$$

womit eine Ungleichung zwischen beiden Seiten bewiesen wäre. Die andere ist klar, denn für jedes $\widetilde{x}\in X$ ist

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) \ge \min_{y\in Y} f(\widetilde{x},y)$$

und für jedes $y\in Y$ ist

$$f(\widetilde{x},y)\ge \max_{x\in X} f(x,y)\,,\ \text{also auch}\quad \min_{y\in Y} f(\widetilde{x},y)\ge \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y)\,,$$

insgesamt also

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) \ge \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y)\,.$$

Somit sind beide Seiten gleich, wie behauptet. ∎

JOHN VON NEUMANN bewies diesen Satz im Zusammenhang mit Fragen der im wesentlichen von ihm ab etwa 1920 entwickelten Spieltheorie. Dabei ging es, trotz des Titels *Eine mathematische Theorie*

der Gesellschaftsspiele nicht um optimale Strategien für Schach oder Mensch ärgere dich nicht, sondern die „Spiele“ sollten auch nützlich sein, um die Handlungen der Teilnehmer eines Wirtschaftssystems zu beschreiben und rationale Strategien für sie zu finden.

Ein Spiel wird gespielt von n Personen; dem i-ten Spieler stehen dabei die Strategien aus einer gewissen Menge S_i zur Verfügung. In Abhängigkeit von den Strategien *aller* Spieler erhält er danach seinen (nicht notwendigerweise positiven) Auszahlungsbetrag $a^{(i)}(s_1, \ldots, s_n)$. Die Funktionen $a^{(i)}$ sind im Voraus bekannt, die Strategien der anderen Spieler im Allgemeinen nicht.

Als einfaches Beispiel können wir das Spiel *Stein-Schere-Papier* betrachten: Zwei Spieler bilden hinter ihrem Rücken mit einer Hand das Symbol für Stein oder Schere oder Papier; auf ein Kommando zeigen sie gleichzeitig ihre Hände. Dabei gewinnt der Stein über die Schere *(Der Stein schleift die Schere)*, die Schere über das Papier *(Die Schere schneidet das Papier)* und das Papier über den Stein *(Das Papier wickelt den Stein ein)*. Haben beide Spieler das gleiche Symbol gewählt, geht das Spiel unentschieden aus.

Beschreibt man Gewinn durch die Auszahlung +1, Verlust durch -1 und Unentschieden durch die Null, wird die Auszahlungsfunktion $a^{(1)}$ für den ersten Spieler durch folgende Tabelle gegeben, in der oben die Strategie des ersten Spielers steht und unten die des zweiten:

	Stein	*Schere*	*Papier*
Stein	0	-1	+1
Schere	+1	0	-1
Papier	-1	+1	0

Für den zweiten Spieler haben wir jeweils den betragsgleichen Auszahlungswert mit dem anderen Vorzeichen.

Kehren wir zurück zu einem allgemeinen Spiel mit n Spielern, n Strategiemengen S_i und n Auszahlungsfunktionen

$$a^{(i)}\colon S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}\,.$$

Welche Strategie sollte der i-te Spieler wählen, um möglichst viel zu gewinnen oder wenigstens möglichst wenig zu verlieren?

Um seine Verluste zu begrenzen, sollte er auf überoptimistische Annahmen bezüglich der Strategien der übrigen Spieler verzichten. Um eine *garantierte* Untergrenze für seine Auszahlung zu bestimmen, muß er davon ausgehen, daß die Mitspieler die (für ihn) schlimmstmöglichen Strategien wählen, d.h. sie wählen Strategien s_j^* derart, daß

$$\begin{aligned} &a^{(i)}(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*) \\ = \min\, &a^{(i)}(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n) \end{aligned}$$

ist, wobei in der zweiten Zeile alle s_j mit $j \neq i$ jeweils ihren gesamten Wertebereich S_j durchlaufen. Dieser Mindestauszahlungsbetrag $m(s_i)$ wird für verschiedene Strategien $s_i \in S_i$ im allgemeinen verschieden hoch sein; er sollte eine Strategie s_i^* wählen, die in möglichst groß macht. Dann kann er *sicher* sein, daß seine Auszahlung mindestens $m(s_i^*)$ beträgt, je nach Strategien der Mitspieler eventuell auch mehr.

Die obige Formel ist trotz ihrer Einfachheit sehr lang. Da wir in Zukunft häufig Ausdrücke ähnlicher Form brauchen werden, empfiehlt es sich daher, eine kompaktere Notation einzuführen: Für ein kartesisches Produkt $S = \prod_{j=1}^{n} S_j$ bezeichnen wir mit S_{-i} das entsprechende Produkt ohne seinen i-ten Faktor, und für ein n-Tupel $s \in S$ sei $s_{-i} \in S_{-i}$ die Projektion von s nach S_{-i}, also jenes $(n-1)$-Tupel, das aus s durch Streichen der i-ten Komponente entsteht. Mit $s_{-i}|u$ bezeichnen wir jenes n-Tupel aus S, in dem die i-te Komponente von s durch u ersetzt wird. Mit dieser Schreibweise wird die obige doppelzeilige Formel einfach zu

$$a^{(i)}(s_{-i}^*|s_i) = \min_{s_{-i} \in S_{-i}} a^{(i)}(s_{-i}|s_i)\,.$$

Beim Spiel *Stein-Schere-Papier* bringen diese Überlegungen leider nichts: Zu *jeder* eigenen Strategie gibt es eine Strategie des Gegners, die zur Auszahlung -1 führt; es ist also völlig egal, welche man wählt.

Nun wird freilich jedermann einwenden, daß man bei einem Spiel wie *Stein-Schere-Papier* keine feste Strategie wählen *darf*, sondern die Strategie häufig und für den Gegner unvorhersehbar wechseln sollte. Das wußte auch VON NEUMANN, und er beschränkte sich daher nicht auf die bislang betrachteten sogenannten *reinen* Strategien, sondern ließ auch

gemischte Strategien zu. Eine gemischte Strategie eines Spielers, dem m reine Strategien zur Verfügung stehen, ist ein Vektor $(p_1, \ldots, p_m)$ aus nichtnegativen reellen Zahlen mit Summe eins, der vorschreibt, daß zufällig eine der m Strategien gewählt wird, wobei p_i die Wahrscheinlichkeit für die i-te ist. Die Menge der gemischten Strategien für einen Spieler mit m reinen Strategien ist somit ein abgeschlossenes $(m-1)$-Simplex. Als Auszahlungswert eines n-Tupels aus gemischten Strategie definiert man den Erwartungswert der Auszahlungen bezüglich der durch die Strategien definierte Wahrscheinlichkeitsverteilung auf dem Produkt der Mengen der reinen Strategien.

Beim Spiel *Stein-Schere-Papier* überlegt man sich leicht, daß die optimale gemischte Strategie für jeden Spiele darin besteht, jede der drei reinen Strategien mit der gleichen Wahrscheinlichkeit $1/3$ zu wählen; dann und nur dann ist sein Erwartungswert nicht negativ; siehe Übungsblatt. Spielen beide mit dieser Strategie, ist der Erwartungswert für beide gleich Null, was ja auch der Sinn dieses Spiel ist. Beide Spieler handeln zum eigenen Schaden, wenn sie von dieser Strategie abweichen.

Mit seinem Minimax-Theorem konnte JOHN VON NEUMANN zeigen, daß es für eine größere Klasse von Zwei-Personen-Spielen ein Paar von (im allgemeinen gemischten) Strategien gibt derart, daß sich keiner der beiden Spieler verbessern kann, wenn er von seiner Strategie abweicht, während der Gegner bei der seinigen bleibt:

Definition: *a)* Ein Zwei-Personen-Nullsummenspiel ist ein Spiel mit zwei Spielern, denen jeweils eine endliche Menge von reinen Strategien zur Verfügung stehen, und bei dem die Auszahlungsfunktion des einen Spielers das Negative der Auszahlungsfunktion des anderen ist.
b) Ein *Gleichgewicht* eines n-Personenspiels ist ein n-Tupel von Strategien derart, daß keiner der n Spieler seine Auszahlung verbessern kann, wenn er seine Strategie ändert, während die übrigen Spieler bei ihren Strategien bleiben. Bezeichnet S_i die Strategiemenge des i-ten Spielers, ist $s^* \in S_1 \times \cdots \times SS_n$ also genau dann ein Gleichgewicht, wenn gilt:

$$a^{(i)}(s^*) = \max_{s \in S_i} a^{(i)}(s^*_{-i} | s_i) \quad \text{für } i = 1, \ldots, n\,.$$

Satz: In einen Zwei-Personen-Nullsummenspiel gibt es stets mindestens ein Gleichgewicht aus (im Allgemeinen) gemischten Strategien.

Beweis: Der erste Spieler betrachtet nach obigen Überlegungen zu jeder seinen Strategien $s \in S_1$ jene Strategie $t^* \in S_2$ seines Gegners, für die

$$a^{(1)}(s, t^*) = m(s) \underset{\text{def}}{=} \min_{t \in S_2} a^{(1)}(s, t)$$

ist und wählt dann jene Strategie s^*, für die $m(s^*)$ maximal wird. Wählt der Gegner auch dazu die aus Sicht des ersten Spielers schlimmstmögliche Strategie t^*, ist also

$$a^{(1)}(s^*, t^*) = \max_{s \in S_1} \min_{t \in S_2} a^{(1)}(s, t)\,.$$

Entsprechend wählt der zweite Spieler eine Strategie $\widetilde{t}$, so daß auch für die aus seiner Sicht schlimmstmögliche Strategie $\widetilde{s}$ des ersten Spielers gilt

$$a^{(1)}(\widetilde{s}, \widetilde{t}) = \max_{t \in S_2} \min_{s \in S_1} a^{(2)}(s, t)\,.$$

Da wir gemischte Strategien betrachten, sind S_1 und S_2 abgeschlossene Simplizes, also kompakt und konvex; auch ihr Produkt $S_1 \times S_2$ ist somit kompakt und konvex. Bezeichnet $a_{ij}^{(1)}$ die Auszahlung für den ersten Spieler unter der Voraussetzung, daß dieser die i-te seiner m_1 reinen Strategien und der zweite die j-te seiner m_2 reinen Strategien spielt, so ist die Auszahlung $a^{(1)}(p, q)$ für die beiden gemischten Strategien $p \in S_1$ und $q \in S_2$ gegeben durch die offensichtlich stetige Funktion

$$a^{(1)}\colon \begin{cases} S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \\ \qquad (p, q) \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} p_i q_j a_{ij}^{(1)} \end{cases}$$

Da sie in jedem ihrer beiden Argumente linear ist, sieht man auch sofort, daß

$$\left\{ p \in S_1 \;\middle|\; a^{(1)}(p, q) \leq \alpha \right\}$$

für alle $q \in S_2$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$ konvex ist; entsprechend auch

$$\left\{ q \in S_1 \;\middle|\; a^{(1)}(p, q) \geq \beta \right\}$$

für alle $p \in S_1$ und $\beta \in \mathbb{R}$. Somit sind alle Voraussetzungen des Minimax-Theorems erfüllt und wir haben

$$\begin{aligned} a^{(1)}(\widetilde{s},\widetilde{t}) &= -a^{(2)}(\widetilde{s},\widetilde{t}) = -\max_{t\in S_2}\min_{s\in S_1} a^{(2)}(s,t) \\ &= -\max_{t\in S_2}\min_{s\in S_1}\bigl(-a^{(1)}(s,t)\bigr) \\ &= \min_{t\in S_2}\max_{s\in S_1} a^{(1)}(s,t) = \max_{s\in S_1}\min_{t\in S_2} a^{(1)}(s,t) \\ &= a^{(1)}(s^*,t^*)\,. \end{aligned}$$

Mithin führen die Paare (s^*,t^*) und $(\widetilde{s},\widetilde{t})$ zu denselben Auszahlungen; egal ob sie gleich sind oder nicht sind sie daher Gleichgewichte. ∎

Nun sind freilich nicht alle Spiele Nullsummenspiele, und gerade im Wirtschaftsleben gibt es meist erheblich mehr als nur zwei Spieler. Wie JOHN NASH 1946 im Rahmen seiner Dissertation zeigte, kann die Existenz von Gleichgewichten auch noch unter sehr viel allgemeineren Voraussetzungen sichergestellt werden.

Er betrachtet dazu für ein n-Personenspiel mit Strategiemenge S_i und Auszahlungsfunktionen $a^{(i)}\colon S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$ für den i-ten Spieler zu jedem n-Tupel s von Strategien die Mengen

$$B_i(s) = \bigl\{t^* \in S_i \;\big|\; a^{(i)}(s_{-i}|t^*) = \max_{t\in S_i} a^{(i)}(s_{-i}|t)\bigr\}$$

der für den i-ten Spieler optimalen Strategien unter der Voraussetzung, daß jeder andere Spieler $j \neq i$ die Strategie s_j wählt. Offensichtlich ist s genau dann ein Gleichgewicht, wenn s für jedes i in $B_i(s)$ liegt. Definieren wir eine Korrespondenz

$$B\colon \begin{cases} S_1 \times \cdots \times S_n \to\!\!\!\!\to S_1 \times \cdots \times S_n \\ \qquad\qquad s \mapsto B_1(s) \times \cdots \times B_n(s) \end{cases},$$

so ist dies äquivalent dazu, daß $s \in B(s)$ ein Fixpunkt von B ist. Nach dem Fixpunktsatz von KAKUTANI gibt es solche Punkte s zumindest dann, wenn gilt: Das Produkt der S_i ist kompakt und konvex, B ist halbstetig nach oben und alle $B(s)$ sind abgeschlossen und konvex.

Betrachten wir zunächst die klassische Situation, daß jedem Spieler eine endliche Anzahl reiner Strategien zur Verfügung stehen; für den i-ten

Spieler seien dies m_i Stück. Dann ist die Menge S_i seiner gemischten Strategien ein (m_i-1)-Simplex, also insbesondere kompakt und konvex; dasselbe gilt dann auch für das Produkt aller dieser S_i.

Die Auszahlungsfunktionen $S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$ sind in diesem Fall gegeben durch

$$a^{(i)}(p^{(1)}, \ldots, p^{(n)}) = \sum_{j_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{j_n=1}^{m_n} \prod_{i=1}^{n} p_{j_i}^{(i)} a_{i_1 \ldots i_n}^{(i)} ,$$

wobei $p^{(i)} \in S_i$ den Wahrscheinlichkeitsvektor für den i-ten Spieler bezeichnet und $a_{i_1 \ldots i_n}^{(i)}$ dessen Gewinn, falls jeder Spieler j die i_j-te seiner reinen Strategien wählt. Diese Funktion ist offensichtlich linear in jedem ihrer n Argumente, insbesondere also stetig, und jede der Mengen $B_i(s)$ ist abgeschlossen und konvex, also auch das Produkt $B(s)$ aller $B_i(s)$.

Zur Anwendbarkeit des Fixpunktsatzes von KAKUTANI fehlt somit nur noch, daß die Korrespondenz B halbstetig nach oben ist. Um dies nachzuweisen, verwenden wir die Charakterisierung durch Folgen: Wir müssen zeigen, daß für jede konvergente Folge $(s^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ von n-Tupeln aus $S_1 \times \cdots \times S_n$ und jede weitere solche Folge $(t^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $t^{(k)} \in B(s^{(k)})$ für alle k auch der Grenzwert t der zweiten Folge in $B(s)$ liegt, wobei s den Grenzwert der ersten Folge bezeichnet. Nach Definition der Mengen $B_i(u)$ ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jedes $i = 1, \ldots, n$ der Auszahlungswert an den i-ten Spieler optimal, falls alle anderen Spieler die $s^{(k)}$ entsprechende Strategie wählen, er aber die i-te Komponente von $t^{(k)}$. Wegen der Stetigkeit der Auszahlungsfunktionen gilt dies auch für den Grenzwert, also ist $t \in B(s)$, wie behauptet.

Damit sind alle Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von KAKUTANI erfüllt; es gibt daher ein n-Tupel s von Strategien, das in $B(s)$ liegt und damit ein Gleichgewicht ist. Damit haben wir bewiesen

Satz: Jedes n-Personen-Spiel, bei dem jedem Spieler eine endliche Anzahl reiner Strategien zur Verfügung stehen, hat zumindest in gemischten Strategien ein Gleichgewicht.

∎

Heute bezeichnet man solche Gleichgewichte als NASH-Gleichgewichte.

Der Ansatz von NASH zeigt die Existenz von Gleichgewichten freilich auch in sehr viel allgemeineren Situationen; um die Mengen $B_i(s)$ zu definieren, brauchen wir nicht einmal eine Auszahlungsfunktionen, sondern es genügt, daß jeder Spieler irgendeine Präferenzstruktur auf dem Produkt aller Strategiemengen hat. Das ist beispielsweise bei manchen Anwendungen in Politik und Wirtschaft von Vorteil, wo die Handelnden zwar oft wissen, welche von zwei Situationen sie der anderen vorziehen, wo es aber oft schwer ist, den Unterschied zwischen den beiden quantitativ zu fassen. Natürlich müssen auch in solchen Fällen die Voraussetzungen des Satzes von KAKUTANI nachgewiesen werden, bevor man auf die Existenz eines Gleichgewichts schließen kann.

Bevor wir nun übermütig werden und glauben, wir hätten alle Probleme der Spieltheorie gelöst, wollen wir uns einige konkrete Beispiele von NASH-Gleichgewichten anschauen.

Eines der klassischsten, das in praktisch jedem Lehrbuch der Spieltheorie zu finden ist, hat als „Spieler“ zwei Personen, die verdächtigt werden, gemeinsam ein Verbrechen begangen zu haben, das man ihnen allerdings nicht nachweisen kann. In manchen Rechtssystemen ist für solche Fälle eine Kronzeugenregelung vorgesehen: Falls einer der beiden gesteht und bereit ist, im Prozeß gegen den anderen auszusagen, geht er straffrei aus (oder bekommt zumindest eine deutlich reduzierte Strafe).

Nehmen wir an, daß konkret jedem der beiden eine Strafe von zehn Jahren Gefängnis droht. Falls nur einer der beiden gesteht, geht er auf Grund der Kronzeugenregelung straffrei aus, während der andere zehn Jahre bekommt. Falls beide gestehen, braucht man keine Kronzeugen mehr, allerdings gibt es für geständige Straftäter typischerweise etwas Strafnachlaß, so daß jeder mit etwa acht Jahren rechnen kann. Gesteht schließlich keiner, so kann ihnen zwar die Tat nicht nachgewiesen werden, dafür aber einige kleinere Straftaten wie illegaler Waffenbesitz, so daß jeder ein Jahr bekommt. Wie sollten sich die beiden im (natürlich getrennten) Verhör verhalten?

Keiner weiß sicher, ob sich der andere für Zugeben oder Leugnen entschieden hat *bzw.* entscheiden wird; er muß also beide Möglichkeiten

in Betracht ziehen. Wenn der andere gesteht, bekommt er acht Jahre, falls auch er gesteht; ansonsten sind es zehn Jahre. Falls der andere leugnet, geht er straffrei aus, wenn er gesteht, und bekommt ein Jahr, wenn er leugnet. In beiden Fällen fährt er besser, wenn er gesteht; also werden wohl beide gestehen und damit für jeweils acht Jahre ins Gefängnis wandern.

Je nachdem, um was für eine Straftat es sich handelte, wird dies aus Sicht der Allgemeinheit wahrscheinlich eine gute Lösung sein, nicht aber aus Sicht der beiden Betroffenen: Hätten beide geleugnet, wären beide besser gefahren. Auch solche Situationen untersucht die Spieltheorie:

Definition: Ein n-Tupel $(s_1, \ldots, s_n)$ in einem n-Personen-Spiel heißt PARETO-*optimal* oder (besser) PARETO-*effizient,* wenn für jedes Tupel $(t_1, \ldots, t_n)$, bei dem (mindestens) einer der Spieler ein besseres Ergebnis erzielt, (mindestens) ein Spieler ein schlechteres Ergebnis erzielt.

Im obigen Beispiel, dem sogenannten *Dilemma des Gefangenen* oder *Prisoner's Dilemma* ist das NASH-Gleichgewicht (Zugeben, Zugeben) offensichtlich nicht PARETO-effizient: Mit der Strategie (Leugnen, Leugnen) würden beide wesentlich besser fahren. Letztere Strategiepaarung ist offensichtlich PARETO-effizient, allerdings gilt dies auch für (Leugnen, Zugeben) und für (Zugeben, Leugnen). PARETO-Effizienz ist somit kein Kriterium, mit dem man bestmögliche Strategien finden kann; sie liefert eher eine ziemlich schwache Minimalforderung an jede „gute" Lösung. Insbesondere ist bei einem Spiel, bei dem eine gegebene Menge an Ressourcen an die Spieler verteilt werden soll, jede Strategie PARETO-effizient, denn was ein Spieler bei einer anderen Strategie mehr bekommt, muß anderen Spielern weggenommen werden.

Trotzdem muß ein NASH-Gleichgewicht nicht einmal diese Mindestvoraussetzung erfüllen, und da zumindest im obigen Beispiel beide durch rationale Überlegungen zu ihrer Strategie kamen, läßt sich das auch nicht ändern. Wie die Spieltheorie zeigt, sind PARETO-effiziente Lösungen nur dann sinnvoll für rational handelnde Spieler, wenn die gleichen Spieler ihr Spiel mehrfach spielen, wobei die Anzahl der Wiederholungen nicht feststehen darf: Ansonsten wäre man schließlich

bei der letzten Wiederholung wieder bei der alten Situation, könnte also davon ausgehen, daß jeder den eigenen Vorteil maximiert. Damit gäbe es aber auch bei der vorletzten Wiederholung keinen Anreiz, sich stattdessen am Gemeinwohl zu orientieren, und so weiter.

Situationen wie beim Dilemma des Gefangenen treten auch in der Politik auf. Als Beispiel können wir das Wettrüsten zur Zeit des Kalten Kriegs zwischen der USA und der UdSSR betrachten. Beide Regierungen mußten sich zwischen Auf- und Abrüstung entscheiden.

Hätten beide abgerüstet, hätte das ihre Wirtschaften entlastet und damit gestärkt; der Wohlstand und die Zufriedenheit der Bürger währen gestiegen, ohne daß sich im Verhältnis der beiden Staaten etwas geändert hätte. Die „Auszahlung“ wäre daher sicherlich für beide positiv gewesen wäre; sagen wir zehn auf irgendeiner Skala.

Wenn nur einer abrüstet, der andere aber aufrüstet, so stärkt dies sicherlich die Wirtschaft des abrüstenden Staats; dieser wird nun aber zumindest langfristig dominiert vom anderen, was mit einem großen Prestigeverlust einhergeht. Entsprechend nimmt das Prestige des anderen zu, und dieser kann künftig möglicherweise Forderungen stellen, die ihm auch wirtschaftlich nützen. Da in der Welt der Politik Prestige oft erheblich wichtiger ist als reale Indikatoren, wäre der Gewinn des aufrüstenden Staates auf unserer hypothetischen Skala größer als zehn, sagen wir fünfzehn, während der abrüstende eine Auszahlung von -15 zu erwarten hätte.

Wenn schließlich beide aufrüsten, ändert sich nichts an ihrem Verhältnis, aber die Aufrüstung belastet die Wirtschaft; somit erhalten beide eine Auszahlung von minus fünf auf unserer Skala.

Wieder ist beidseitige Aufrüstung das einzige NASH-Gleichgewicht, und wieder ist es die einzige Strategiepaarung, die nicht PARETO-effizient ist.

Als letztes wollen wir ein Beispiel betrachten, in dem das NASH-Gleichgewicht nicht eindeutig ist und somit nicht einmal als Anleitung zum Handeln dienen kann. Der Mathematiker und Philosoph BETRAND RUSSELL verglich das folgende Spiel *Chicken*, dessen Namen man hier

mit *Feigling* übersetzen muß, mit dem Handeln der am atomaren Wettrüsten beteiligten Politiker:

Zwei Spieler fahren auf der Mittellinie einer geraden Straße mit hoher Geschwindigkeit aufeinander zu. Wer zuerst ausweicht hat verloren.

Auch wenn es sich hier um einen typischen Fall handelt, bei dem die Präferenzen der einzelnen Spieler zwar klar sind, sich aber nur schwer quantifizieren lassen, können wir der Einfachheit halber von zwei Auszahlungsfunktionen ausgehen: Weicht einer aus, und der andere fährt geradeaus weiter, hat der Ausweichende verloren und erhält somit die Auszahlung -1; sein Gegner gewinnt und erhält $+1$. Weicht keiner aus, rasen sie aufeinander, was wahrscheinlich keiner überlebt und was wir mit einer Auszahlung von -100 für beide modellieren. Weichen schließlich beide aus (was wohl gleichzeitig geschehen muß, denn sobald einer sieht, das der andere ausweicht, hat er dazu keinen Grund mehr), geht das Spiel unentschieden aus; der Auszahlungsbetrag für beide ist Null.

Hier gibt es zwei NASH-Gleichgewichte, nämlich die beiden, bei denen einer ausweicht und der andere nicht; bei beiden Alternativen stellt sich jeder Spieler schlechter, wenn er seine Strategie ändert, während der andere die seinige beibehält. Eine Handlungsempfehlung läßt sich daraus nicht ableiten.

Kapitel 9
Wirtschaftliche Gleichgewichte

In diesem Kapitel soll es darum gehen, unter möglichst schwachen Bedingungen die Existenz von Gleichgewichten in einem Wirtschaftssystem zu zeigen. Da deren Existenz bereits gegen Ende des 19. Jahrhunderts von LEON WALRAS postuliert wurde, spricht man in der Ökonomie von WALRASschen Gleichgewichten; einen mathematisch sauberen formalen Beweis für ihre Existenz gaben aber erst KENNETH J. ARROW und GERARD DEBREU in ihrer 1954 erschienenen Arbeit

> KENNETH J. ARROW, GERARD DEBREU: Existence of an equilibrium for a competitive economy, *Econometrica* **22** (1954), 265–290

Dieses Kapitel folgt weitgehend der Darstellung in dieser Arbeit.

§ 1: Wirtschaftssysteme

Als erstes müssen wir ein mathematisches Modell für eine Volkswirtschaft definieren. Da die Ökonomie eine Realwissenschaft ist, wird dies nicht ohne Vereinfachungen und Abstraktionen möglich sein; wir gehen aus von den folgenden Annahmen:

Im betrachteten Wirtschaftssystem gibt es ℓ Güter, die wir einfach durch die natürlichen Zahlen $h = 1, \ldots, \ell$ bezeichnen. Zu diesen Gütern gehören auch Dienstleistungen, insbesondere also auch Arbeit. Alle Güter sind quantifizierbar durch reelle Zahlen. Besitz, Produktion und Verbrauch eines Teilnehmers am Wirtschaftssystem lassen sich somit beschreiben durch Vektoren aus $\mathbb{R}^\ell$, deren h-te Komponente jeweils die

Menge des h-ten Guts angibt. Zum Vergleich solcher Vektoren verwenden wir folgende Konvention:

Definition: *a)* Für zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^\ell$ ist $x \geq y$ genau dann, wenn $x_h \geq y_h$ für alle $h = 1, \ldots, \ell$.
b) $x > y$ genau dann, wenn $x_h > y_h$ für alle $h = 1, \ldots, \ell$.
c) $\Omega \underset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^\ell \mid x \geq 0\}$.
d) Für $A \subseteq \mathbb{R}^\ell$ ist $-A = \{-x \mid x \in A\}$.
e) Für ν Teilmengen $A_\iota \subset \mathbb{R}^\ell$, $\iota = 1, \ldots, \nu$ ist

$$\sum_{\iota=1}^{\nu} A_\iota \underset{\text{def}}{=} \left\{ x \in \mathbb{R}^\ell \;\middle|\; x = \sum_{\iota=1}^{\nu} x_i \text{ für irgendwelche } x_\iota \in A_\iota \right\}.$$

a) Die Produzenten

Die am einfachsten zu beschreibenden Akteure einer Volkswirtschaft sind die *Produzenten*. Ihre Anzahl bezeichnen wir mit m, sie selbst mit den natürlichen Zahlen $j = 1, \ldots, m$. Jedem Produzenten j steht eine Menge $Y_j \subset \mathbb{R}^\ell$ von Produktionsplänen y_j zur Verfügung. Die h-te Komponente eines solchen Vektors y_j ist positiv, wenn nach diesem Produktionsplan die entsprechende Menge des Guts h produziert wird; sie ist negativ, wenn eine entsprechende Menge von h bei der Produktion eingesetzt wurde. Zu solchen Gütern h gehören nicht nur die verwendeten Rohstoffe und extern produzierte Komponenten, sondern insbesondere auch die eingesetzte Arbeit. Die Summenmenge

$$Y \underset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{m} Y_j$$

ist die Menge aller in der betrachteten Volkswirtschaft realisierbarer Produktionspläne; an sie sowie die einzelnen Mengen Y_j stellen wir die folgenden Forderungen:

I.a Y_j ist eine abgeschlossene konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^\ell$, die den Nullvektor 0 enthält.

I.b $Y \cap \Omega = \{0\}$

I.c $Y \cap (-Y) = \{0\}$

Bedingung I.a besagt insbesondere, daß die Produktion um einen konstanten Faktor zurückgefahren werden kann, denn da der Nullvektor in jedem Y_j liegt, ist für $\lambda \in (0,\ 1)$ und $y_j \in Y_j$ auch

$$\lambda y_j = \lambda y_j + (1 - \lambda)0 \in Y_j \ .$$

Die Bedingung $0 \in Y_j$ ermöglicht es auch, daß sich ein Produzent ganz aus der Produktion zurückzieht.

Bedingung I.b sagt, daß eine Volkswirtschaft nichts produzieren kann, ohne dabei Ressourcen wie Rohstoffe und/oder Arbeit zu verbrauchen. Bedingung I.c schließlich besagt, daß ein Produktionsvorgang nicht rückgängig gemacht werden kann: Bezüglich der eingesetzten materiellen Güter mag das zwar eventuell möglich sein; ein perfektes Recycling strebt dies jedenfalls an. Die postulierte Asymmetrie kommt aber von der Arbeit: Sowohl für die Montage wie auch für die Demontage muß Arbeit aufgewendet werden; ein Produktionsschritt kann zwar rückgängig gemacht werden, aber dabei muß neue Arbeit aufgewendet werden; die alte Arbeit wird nicht frei zum Einsatz für andere Produktionsschritte.

Aus Sicht eines Produzenten sind die verschiedenen Produktionspläne, die ihm zur Verfügung stehen, selbstverständlich nicht alle gleich erstrebenswert; er will (und muß) durch seine Aktivität etwas verdienen. Wir nehmen an, daß er seinen Gewinn maximieren möchte. Dieser hängt natürlich davon ab, zu welchem Preis er seine Produkte verkaufen kann und welchen Preis er für die eingesetzten Ressourcen bezahlen muß.

Nach der reinen marktwirtschaftlichen Lehre sollte der Markt die Preise der einzelnen Güter festlegen; wir nehmen an, daß die Marktentwicklung zu einem Preisvektor $p^* \in \mathbb{R}^\ell$ für die Preise der verschiedenen Güter führte. Der Gewinn oder Verlust der j-ten Produzenten ist dann bei Wahl des Produktionsplans y_j das Skalarprodukt $p^* y_j$ des Preisvektors mit dem Produktionsplan; wir gehen davon aus, daß er dieses maximieren möchte. Seine Strategie ist somit die folgende:

(1) *Wähle einen Produktionsplan $y_j^* \in Y_j$ so, daß das Skalarprodukt $p^* y_j^*$ das Maximum unter allen $p^* y_j$ mit $y_j \in Y_j$ annimmt.*

Diese Strategie wird in unserem Modell von allen m Produzenten verfolgt.

b) Die Konsumenten

Davon gebe es n Stück; wir bezeichnen sie durch die natürlichen Zahlen $i = 1, \ldots, n$. Jeder von ihnen hat gewisse Bedürfnisse, die er durch Verbrauch von Gütern befriedigen muß. Wir gehen davon aus, daß ihm dazu eine gewisse Menge $X_i \subset \mathbb{R}^n$ von möglichen Verbrauchsvektoren zur Verfügung steht. Für jedes $x_i \in X_i$ stehen die positiven Komponenten für konsumierte Güter, die negativen für zu leistende Arbeit oder verkaufte Güter. Wir nehmen an:

II. Die Mengen X_i sind abgeschlossen, konvex und nach unten beschränkt; es gibt also für jeden Verbraucher i einen Vektor $\xi_i \in \mathbb{R}^\ell$, so daß $x_i \geq \xi_i$ für alle $x_i \in X_i$.

Die Beschränktheit nach unten sorgt einerseits dafür, daß gewisse Grundbedürfnisse befriedigt werden, anderseits aber begrenzt sie auch jede mögliche Arbeitsleistung. Die Abgeschlossenheit von X_i ist eine Art Stetigkeitsbedingung, und die Konvexität zeigt insbesondere die Substituierbarkeit von Gütern, die auf dem Markt gegen andere getauscht werden können.

Ein Verbraucher wird seinen Verbrauchsvektor im allgemeinen nicht einfach durch Kostenminimierung festlegen: Die wenigsten Verbraucher dürften damit zufrieden sein, sich nur von Wasser und Brot zu ernähren. Wir gehen daher davon aus, daß jeder Verbraucher eine *Nützlichkeitsfunktion* $u_i \colon X_i \to \mathbb{R}$ hat, die jedem möglichen Verbrauchsvektor eine reelle Zahl zuordnet, die umso größer ist, je mehr ihm der betreffende Verbrauchsvektor zusagt. Wir nehmen an, daß gilt

III.a u_i ist eine stetige Funktion

III.b Für jedes $x_i \in X_i$ gibt es ein $x_i' \in X_i$ mit $u_i(x_i') > u_i(x_i)$

III.c Ist $u_i(x_i') > u_i(x_i)$, so gilt auch für jedes $\lambda \in (0,\, 1)$ die Ungleichung $u_i\big((\lambda x_i' + (1-\lambda)x_i\big) > u_i(x_i)$.

Bedingung III.a besagt insbesondere, daß die Menge aller Verbrauchsvektoren, deren Nützlichkeit aus Sicht eines gegebenen Verbrauchers größer oder gleich einem vorgegebenen Wert ist, abgeschlossen ist;

durch reine Präferenzen ausgedrückt heißt dies: Ist $(x_i^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge von Verbrauchsvektoren $x_i^{(k)} \in X_i$ derart, daß Verbraucher i jedes $x_i^{(k)}$ mindestens genauso sehr schätzt wie eine Alternative $\tilde{x}_i$, so schätzt er auch den Grenzwert mindestens genauso sehr wie $\tilde{x}_i$.

Bedingung III.b formalisiert eine wohlbekannte Beobachtung: Egal, wie gut es uns geht: Wir können uns immer einen Zustand vorstellen, der uns noch lieber ist, weil der entsprechende Vektor entweder mehr von einem unserer Lieblingsgüter enthält oder ein Gut, das wir noch nicht haben, oder was auch immer.

Bedingung III.c ist insbesondere eine Konvexitätsbedingung: Sie impliziert, daß für jede reelle Zahl a die Menge

$$M = \left\{ x_i \in X_i \;\middle|\; u_i(x_i) \geq a \right\}$$

aller Aktionen, deren Nützlichkeit als größer oder gleich a eingeschätzt wird, konvex ist: Sind nämlich x_i und x_i' zwei Vektoren aus M, so können wir o.B.d.A. annehmen, daß $u_i(x_i') \geq u_i(x_i)$ ist. Falls sogar $u_i(x_i') > u_i(x_i)$ ist, sagt uns III.c direkt, daß auch $u_i\left(\lambda x_i + (1-\lambda)x_i'\right)$ für alle $\lambda \in [0,\ 1)$ größer ist als $u_i(x_i')$. Falls $u_i(x_i) = u_i(x_i')$ ist, müssen wir uns anders überlegen, daß es kein $x_i^* = \lambda x_i + (1-\lambda)x_i'$ gibt mit $u_i(x_i^*) < u(x_i)$. Gäbe es so ein x_i^*, so gäbe es wegen der Stetigkeit von u_i einen Vektor x_i^+ mit $u_i(x_i^*) < u_i(x_i^+) < u_i(x_i) = u_i(x_i')$ auf der Verbindungsstrecke von x_i^* zu x_i. Auf der Strecke von x_i nach x_i' kommen wir somit zunächst zu x_i^*, dann zu x_i^+ und schließlich zu x_i'. Daher läßt sich x_i^* als konvexe Linearkombination von x_i und x_i^+ ausdrücken. Da $u(x_i) > u(x_i^+)$ ist, muß daher nach III.b auch $u(x_i^*) > u(x_i)$ sein, im Widerspruch zur Annahme. Somit ist $u(x_i^*) \geq u(x_i) \geq a$ für alle $x_i^* = \lambda x_i + (1-\lambda)x_i'$ zwischen x_i und x_i'.

Leider kann sich unser Verbrauch von Konsumgütern nicht nur an unseren Präferenzen orientieren, sondern muß auch unsere Mittel in Betracht ziehen. Um dies zu modellieren, betrachten ARROW und DEBREU zwei Arten von Einkünften: Zum einen verfügt Verbraucher i zu Beginn über eine gewisse Menge von Gütern; die h-te Komponente des Vektors $\zeta_i \in \mathbb{R}^\ell$ gebe deren Menge für das Gut h an. Außerdem können Verbraucher Anteile an Produzenten besitzen und damit einen Anspruch auf

einen entsprechenden Anteil an deren Gewinnen. α_{ij} gebe an, welchen Anteil Verbraucher i am Produzenten j besitzt. Wir nehmen an, daß gilt

IV.a Es gibt ein $x_i \in X_i$ mit $x_i < \zeta_i$.

IV.b $\alpha_{ij} \geq 0$ für alle i, j und $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} = 1$.

Bedingung IV.a besagt, daß es einen möglichen Verbrauchsvektor gibt, dessen sämtliche Komponenten echt kleiner sind als die entsprechenden Komponenten von ζ_i; wir nehmen also an, daß jeder Verbraucher von *jedem* Gut mehr besitzt als er gemäß zumindest einem seiner möglichen Verbrauchsvektoren braucht, und daß er damit *jedes* Gut des betrachteten Wirtschaftssystems gegebenenfalls zum Verkauf anbieten könnte. Diese Voraussetzung ist sicherlich unrealistisch, sie vereinfacht aber den Beweis der Existenz eines Gleichgewichts beträchtlich. ARROW und DEBREU betrachten deshalb zunächst den Fall eines Wirtschaftssystem, in dem diese Bedingung erfüllt ist, und diskutieren danach die notwendigen Modifikationen um IV.a durch realistischere Bedingungen zu ersetzen.

Bedingung IV.b ist weitgehend unproblematisch: Die Summenbedingung besagt einfach, daß jeder Anteilseigner eines Produzenten als Verbraucher auftritt, und $\alpha_{ij} \geq 0$ verbietet den Verkauf von Anteilen, die man gar nicht besitzt.

Ein Verbraucher kann nur Güter erwerben, die er sich zu den jeweils geltenden Preisen auch leisten kann. Sein Einkommen besteht aus dem Wert der Güter (einschließlich Arbeit), die er auf dem Markt anbieten kann, sowie Gewinnbeteiligungen bei den Produzenten, von denen er Anteile besitzt. Er wählt seinen Verbrauchsvektor x_i^* so, daß die Nützlichkeitsfunktion maximiert wird:

$$(2)\ u_i(x_i^*) = \max\Big\{u(x_i) \;\Big|\; x_i \in X_i \text{ und } p^* x_i \leq p^* \zeta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(p^* y_j)\Big\}$$

Bevor wir definieren können, was ein Gleichgewicht ist, müssen wir uns noch mit dem Preisvektor p^* beschäftigen. Wir gehen davon aus, daß er einfach die relativen Werte der einzelnen Güter angibt, wobei jedes Gut einen nichtnegativen Wert haben soll. Die entsprechende Forderung an den Preisvektor können wir formalisieren durch die Bedingung

$$(3)\ p^* \in P \underset{\text{def}}{=} \Big\{p \in \mathbb{R}^\ell \mid p \geq 0 \text{ und } \sum_{h=1}^{\ell} p_h = 1\Big\}\,.$$

Als letzte Forderung an ein Gleichgewicht, daß seinen Namen verdient, müssen wir noch in irgendeiner Weise formalisieren, daß sich Angebot und Nachfrage für jedes Gut die Waage halten – oder zumindest für fast jedes. Eine Ausnahme bilden etwaige frei erhältliche Güter wie beispielsweise die Nutzung natürlicher Ressourcen oder von Funkfrequenzen, die je nach Wirtschaftssystem in gewissem Rahmen möglicherweise mit einem Preis von Null angesetzt werden kann. Bei solchen Gütern steht zu erwarten, daß sie in genügender Menge vorhanden sind und auch im Gleichgewicht nicht vollständig genutzt werden.

Um dies zu formalisieren, betrachten wir die Summe x aller Verbrauchsvektoren als Vektor der Gesamtnachfrage, die Summe y aller Produktionsvektoren als Vektor des Gesamtangebots und schließlich die Summe ζ aller ζ_i als Vektor der sich im Besitz der Verbraucher befindlichen Güter:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad y = \sum_{j=1}^{m} y_j. \qquad \zeta = \sum_{i=1}^{n} \zeta_i \,.$$

Aus diesen drei Vektoren können wir dann den Nachfrageüberhang

$$z \underset{\text{def}}{=} x - y - \zeta$$

berechnen, von dem wir für Gleichgewichtspunkte fordern:

(4) $z^* \leq 0$ und $p^* z^* = 0$.

Im Gleichgewicht soll also die Nachfrage nach jedem der ℓ Güter befriedigt werden. Die Bedingung $p^* z^* = 0$ impliziert außerdem, daß alle Güter, bei denen das Angebot über der Nachfrage liegt, Wert Null haben: Da für jedes Gut h der Preis $p_h \geq 0$ ist, während der Nachfrageüberhang $z_h \leq 0$ ist, stehen im Skalarprodukt $p^* z^*$ nur nichtpositive Summanden, eine Summe Null ist daher nur möglich, wenn jeder einzelne davon verschwindet. Somit ist $p_h z_h = 0$ für jedes Gut h, im Falle $z_h \neq 0$ muß also $p_h = 0$ sein. Ein Überangebot kann es somit nur bei freien Gütern geben.

Definition: Ein $(m+n+1)$-Tupel $(x_1^*, \ldots, x_n^*, y_1^*, \ldots, y_m^*, p^*)$ von Vektoren aus $\mathbb{R}^\ell$ heißt *Gleichgewicht*, wenn es die Bedingungen (1) – (4) erfüllt.

Satz 1: Unter den Bedingungen I bis IV gibt es ein solches Gleichgewicht.

Der Beweis dieses Satzes sollte ähnlich funktionieren wie der für die Existenz von NASH-Gleichgewichten bei Spielen, allerdings unterscheidet sich die Situation hier in einem Punkt ganz wesentlich von der bei Spielen: Dort steht jedem Spieler eine feste Menge von Strategien zur Verfügung, hier hängt aber zumindest für die Verbraucher die Menge der spielbaren Strategien vom Preisvektor und den Strategien der Produzenten ab. Auch die Auszahlungsfunktion hängt nicht nur ab von den Strategien der Verbraucher und der Produzenten, sondern zusätzlich auch noch vom Preisvektor. Letzteres Problem werden wir dadurch lösen, daß wir einen zusätzlichen Spieler einführen, der die Preise festsetzt. Das Problem mit den variablen Strategiemengen kann nicht so einfach gelöst werden: Hierzu muß der Begriff des Spiels verallgemeinert werden.

§2: Abstrakte Ökonomien

In seiner Arbeit

> GERARD DEBREU: A social equilibrium existence theorem, *Proc. N.A.S.* **38** (1952), 886–893

führte DEBREU 1952 den Begriff einer *abstrakten Ökonomie* ein als Verallgemeinerung des Spielbegriffs und bewies die Existenz von Gleichgewichten für abstrakte Ökonomien. Er verwendete dazu nicht den Fixpunktsatz von KAKUTANI, sondern zwei Verschärfungen, die EILENBERG und MONTGOMERY 1946 *bzw.* BEGLE 1950 publiziert haben. Da in der Arbeit von ARROW und DEBREU nur ein schwächeres Resultat benutzt wird, zu dessen Beweis der Fixpunktsatz von KAKUTANI ausreicht, werde ich mich hier auf dieses schwächere Resultat beschränken.

Eine *abstrakte Ökonomie* hat ν *Agenten* $\iota = 1, \dots, \nu$. Jedem steht eine Menge $\mathcal{A}_\iota$ eventuell möglicher Aktionen zur Verfügung, von denen er jedoch in Abhängigkeit von den Aktionen der anderen Agenten nur die aus einer Teilmenge wirklich ausführen kann: Für jeden Agenten ι haben wir eine Korrespondenz $A_\iota \colon \mathcal{A}_{-\iota} \to \mathcal{A}_\iota$, und für jede Wahl $a_{-\iota} \in \mathcal{A}_{-\iota}$ kann

ι nur die Aktionen aus $A_\iota(a_{-\iota}) \subseteq \mathcal{A}_\iota$ ausführen. Seine Auszahlungsfunktion ist eine Funktion $f_\iota\colon \mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_\nu \to \mathbb{R}$, wobei natürlich nur die Funktionswerte an jenen Punkten $(a_1, \ldots, a_\nu)$ relevant sind, für die a_ι in $A_\iota(a_{-\iota})$ liegt. Abgesehen von dieser Einschränkung sind Gleichgewichte genauso definiert wie das NASH-Gleichgewicht, d.h. keiner der Agenten kann seine Auszahlung verbessern, wenn alle anderen bei ihrer Wahl bleiben und nur er eine andere vor diesem Hintergrund mögliche Aktion wählt:

Definition: Ein Gleichgewichtspunkt einer abstrakten Ökonomie ist ein ν-Tupel $(a_1^*, \ldots, a_\nu^*) \in \mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_\nu$ derart, daß für alle ι gilt:

1. $a_\iota^* \in A_\iota(a_{-\iota}^*)$ und
2. $f_\iota(a_1^*, \ldots, a_\nu^*) = \max\left\{ f_\iota(a_{-\iota}^* | a_\iota) \;\middle|\; a_\iota \in A_\iota(a_{-\iota}) \right\}$.

Satz von Debreu: Alle Mengen $\mathcal{A}_\iota$ seien kompakte konvexe Polyeder und alle Korrespondenzen A_ι, alle Auszahlungsfunktionen f_ι sowie auch alle Funktionen

$$\varphi_\iota\colon \begin{cases} \mathcal{A}_{-\iota} \to \mathbb{R} \\ a_{-\iota} \mapsto \max\left\{ f_\iota(a_{-\iota}^* | a_\iota) \;\middle|\; a_\iota \in A_\iota(a_{-\iota}) \right\} \end{cases};$$

seien stetig. Außerdem seien für alle ι und alle $a_{-\iota} \in \mathcal{A}_{-\iota}$ die Mengen

$$M_{a_{-\iota}} = \left\{ a_\iota \in A_\iota(a_{-\iota}) \;\middle|\; f_\iota(a_{-\iota} | a_\iota) = \varphi_\iota(a_{-\iota}) \right\}$$

konvex. Dann hat die oben definierte abstrakte Ökonomie ein Gleichgewicht.

Man beachte, daß die Korrespondenzen A_ι als *stetig* vorausgesetzt sind, sie müssen also halbstetig sowohl nach oben als auch nach unten sein.

Zum *Beweis* betrachten wir die Korrespondenz

$$\Phi\colon \begin{cases} \mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_\nu \twoheadrightarrow \mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_\nu \\ (a_1, \ldots, a_\nu) \quad \mapsto M_{a_{-1}} \times \cdots \times M_{a_{-\nu}} \end{cases}.$$

Mit den Mengen $\mathcal{A}_\iota$ ist auch deren Produkt kompakt und konvex; um den Fixpunktsatz von KAKUTANI anwenden zu können, müssen wir daher nur zeigen, daß Φ halbstetig nach oben ist.

Dazu beweisen wir zunächst eine etwas allgemeinere Aussage:

X und Y seien Teilmengen endlichdimensionaler reeller Vektorräume, $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Abbildung, und $\varphi\colon X \to\!\!\to Y$ sei eine stetige Korrespondenz. Dann ist die Korrespondenz

$$\mu\colon \begin{cases} X \to\!\!\to Y \\ \qquad x \mapsto \left\{ y \in \varphi(x) \;\middle|\; f(x,y) = \max\limits_{z \in \varphi(x)} f(x,z) \right\} \end{cases}$$

halbstetig nach oben.

Zum Beweis verwenden wir die Charakterisierungen der jeweiligen Stetigkeitsbegriffe durch Folgen: Sei also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in X mit Grenzwert x und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein konvergente Folge in Y mit Grenzwert y derart, daß $y_n \in \mu(x_n)$ für alle n. Da φ halbstetig nach oben ist, liegt dann auch y in $\varphi(x)$. Für jeden anderen Punkt $z \in \varphi(x)$ gibt es wegen der Halbstetigkeit von φ nach unten eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert z, so daß $z_n \in \varphi(x_n)$ für alle n. Nach Definition von μ ist $f(x_n, y_n) \geq f(x_n, z_n)$ für alle n; wegen der Stetigkeit von f ist somit auch $f(x,y) \geq f(x,z)$. Da z beliebig war, muß daher y in $\mu(x)$ liegen, was die Behauptung beweist.

Wenden wir dies an auf $X = \mathcal{A}_{-\iota}$ und $Y = \mathcal{A}_\iota$. Für die Abbildung $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ nehmen wir die Auszahlungsfunktion des Agenten ι, und $\varphi(a_{-\iota})$ sei $A_\iota(a_{-\iota})$. Dann ist

$$\mu(a_{-\iota}) = \left\{ a_\iota \in A_\iota(a_{-\iota}) \;\middle|\; f_\iota(a_{-\iota}|a_\iota) = \max_{a \in A_\iota(a_{-\iota})} f(a_{-\iota}|a) \right\} = M_{a_{-\iota}},$$

die Korrespondenz von $A_{-\iota}$ nach A_ι, die jedem $a_{-\iota}$ die Menge $M_{a_{-\iota}}$ zuordnet, ist also halbstetig nach oben. Da die Projektion vom Produkt $A_1 \times \cdots \times A_\nu$ nach $A_{-\iota}$ eine stetige Abbildung ist, ist somit auch die Korrespondenz

$$\mu_\iota\colon \begin{cases} \mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_\nu \to\!\!\to \mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_\nu \\ \qquad (a_1, \ldots, a_\nu) \quad \mapsto M_{a_{-\iota}} \end{cases}$$

halbstetig nach oben und damit auch Φ als Produkt dieser Korrespondenzen. Damit ist der Satz von DEBREU bewiesen. ∎

§3: Beweis von Satz 1

Sowohl die möglichen Strategiemengen der Verbraucher als auch die Gewinne der Produzenten hängen ab vom Preisgefüge. Nach der klassischen volkswirtschaftlichen Lehre wird dieses vom Markt bestimmt; ARROW und DEBREU führen daher zusätzlich zu den n Verbrauchern und den m Produzenten einen weiteren Agenten ein, den *Marktteilnehmer* oder kurz *Markt.* Wir haben somit eine abstrakte Ökonomie mit $m+n+1$ Teilnehmern.

Die Strategiemenge des neuen Agenten ist die Menge

$$P = \left\{ p \in \mathbb{R}^\ell \;\middle|\; p \geq 0 \text{ und } \sum_{h=1}^{\ell} p_h = 1 \right\}$$

aller möglicher Preisvektoren; die Strategiemenge des j-ten Produzenten ist Y_j. In beiden Fällen gehen wir davon aus, daß den Agenten unabhängig von den Entscheidungen der übrigen Teilnehmer alle Strategien aus der jeweiligen Menge zur Verfügung stehen.

Die Strategiemenge des i-ten Verbrauchers ist natürlich X_i, tatsächlich muß er aber einen Verbrauchsplan wählen, den er auch finanzieren kann, d.h. er muß sich beschränken auf jede Vektoren $x_i \in X_i$, für die das Skalarprodukt px_i mit dem Preisvektor p höchstens gleich dem Wert seiner Güter und Beteiligungen ist:

$$px_i \leq p\zeta_i + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}(py_j)\,.$$

Für einen beliebigen Preisvektor p kann es durchaus sein, daß kein einziges $x_i \in X_i$ diese Bedingung erfüllt: Unter den y_j gibt es schließlich auch negative, und je nach Preisvektor könnte der zweite Summand in obiger Ungleichung negativ sein.

In einem Gleichgewicht kann dies allerdings nicht vorkommen, denn ist p^* der Preisvektor eines Gleichgewichtspunkts und y_j^* der Produktionsplan des j-ten Produzenten in diesem Gleichgewicht, so ist $p^*y_j^* \geq p^*y$ für alle $y \in Y_j$. Da dort insbesondere auch der Nullvektor liegt, ist also $p^*y_j^* \geq 0$. Beim Nachweis der Existenz von Gleichgewichten können wir daher dem i-ten Verbraucher alle Verbrauchspläne

erlauben, für die

$$px_i \leq p\zeta_i + \left(0, \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}(py_j)\right)$$

ist, und diese Teilmenge von X_i definieren wir als $A_i(x_{-i})$. Sie kann nicht leer sein, denn nach unseren Voraussetzungen gibt es ein $x_i' \in X_i$ mit $\zeta_i \geq x_i'$, so daß zumindest x_i' in $A_i(x_{-i})$ liegt. Der Index „$-i$“ bezieht sich hier natürlich auf *alle* übrigen Agenten, also auch die Produzenten und den Marktteilnehmer.

Die Auszahlungsfunktion eines Verbrauchers ist seine Nützlichkeitsfunktion, die eines Produzenten ist das Skalarprodukt seines Produktionsplans mit dem Preisvektor. Bleibt noch die Auszahlungsfunktion des Marktteilnehmers zu definieren.

Nach unseren Forderungen soll im Gleichgewicht der Nachfrageüberhang $z^* = x^* - y^* - \zeta \leq 0$ sein und den Wert $p^*z^* = 0$ haben. Wenn wir die Auszahlungsfunktion für den Marktteilnehmer als pz definieren, ist dies in jedem Gleichgewichtspunkt der betrachteten abstrakten Ökonomie der Fall: Wäre nämlich im Gleichgewicht eine der Komponenten $z_h^* > 0$, so könnte der Marktteilnehmer seine Auszahlung vergrößern, indem er die entsprechende Preiskomponente p_h zu Lasten einer anderen Komponente erhöht, im Widerspruch zur Definition eines Gleichgewichts einer abstrakten Ökonomie. Genauso könnte er im Falle $z_h^* < 0$ seine Auszählung vergrößern, indem er p_h erniedrigt – es sei denn, p_h ist bereits null. Der Marktteilnehmer legt die Preise also nach dem Gesetz von Angebot und Nachfrage fest und erreicht damit, daß im Gleichgewicht $p_h = 0$ ist für alle h mit $z_h < 0$, und $z_h = 0$ für alle Güter h mit $p_h > 0$.

Wenn wir zeigen können, daß die so definierte abstrakte Ökonomie ein Gleichgewicht hat, folgt somit die Behauptung von Satz 1.

Leider erfüllt diese abstrakte Ökonomie aber nicht die Voraussetzungen des Satzes von DEBREU: Zumindest die Strategiemengen X_i der Verbraucher sind definitiv nicht kompakt, denn wir haben ja vorausgesetzt, daß es zu jedem Verbrauchsplan eine Alternative mit höherer Nützlichkeit gibt; auf einem Kompaktum müßte die Nützlichkeitsfunktion aber ein (absolutes) Maximum annehmen.

Die Beweisstrategie von ARROW und DEBREU besteht darin, daß sie die abstrakte Ökonomie so modifizieren, daß alle Strategiemengen kompakt sind, daß die ursprüngliche und die modifizierte Ökonomie aber trotzdem dieselben Gleichgewichte haben.

Da die Strategiemenge P des Marktteilnehmers bereits kompakt ist, müssen nur die Strategiemengen der Verbraucher und der Produzenten modifiziert werden. Die Idee ist in beiden Fällen die gleiche: Wir erlauben jedem Teilnehmer nur solche Strategien, für die es zumindest grundsätzlich für jeden anderen Teilnehmer eine Strategie gibt derart, daß der Nachfrageüberhang der gesamten Ökonomie die Bedingung $z \leq 0$ erfüllt. Wir beschränken daher die Wahlmöglichkeiten des i-ten Verbrauchers auf die Menge

$$\widehat{X}_i = \left\{ x_i \in X_i \;\middle|\; \forall i' \neq i \, \exists x_{i'} \in X_{i'} \forall j \, \exists y_j \in Y_j : z \leq 0 \right\}$$

und die des j-ten Produzenten auf

$$\widehat{Y}_j = \left\{ y_j \in Y_j \;\middle|\; \forall i \, \exists x_i \in X_i \forall j' \neq j \, \exists y_{j'} \in Y_{j'} : z \leq 0 \right\}.$$

Wenn die betrachtete Ökonomie ein Gleichgewicht hat, müssen offensichtlich die Strategien aller Teilnehmer in den so definierten Teilmengen liegen. Da sie abgeschlossen sind, reicht es zum Nachweis der Kompaktheit, daß wir ihre Beschränktheit zeigen.

Angenommen, mindestens eine der Mengen Y_j wäre unbeschränkt; durch Umnummerieren können wir annehmen, daß dies für die Menge Y_1 der Fall sei. Dann gibt es eine Folge von Strategien $y_1^{(k)} \in \widehat{Y}_1$ und für alle i sowie alle $j > 1$ Strategien $x_i^{(k)} \in X_i$ und $y_j \in Y_j$, derart, daß gilt:

$$\lim_{k \to \infty} \left\| y_1^{(k)} \right\| = \infty \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{m} y_j^{(k)} \geq \sum_{i=1}^{n} x_i^{(k)} - \zeta \,.$$

Bezeichnet ξ die Summe der Untergrenzen ξ_i für die Strategiemengen X_i der einzelnen Verbraucher, so ist nach Voraussetzung II

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{(k)} \geq \xi \quad \text{und damit} \quad \sum_{j=1}^{m} y_j^{(k)} \geq \xi - \zeta \,.$$

Wir betrachten für jeden Index k das Maximum $\mu^{(k)}$ der Normen der $y_j^{(k)}$. Da insbesondere $\mu^{(k)} \geq \left\| y_1^{(k)} \right\|$ ist, gehen die $\mu^{(k)}$ gegen unendlich; für hinreichend große Werte von k sind sie also größer als eins. Nach Annahme I.a ist dann für jeden Produzenten j

$$\frac{y_j^{(k)}}{\mu^{(k)}} = \frac{1}{\mu^{(k)}} y_j^{(k)} + \left(1 - \frac{1}{\mu^{(k)}}\right) 0 \in Y_j \,.$$

Die Summe aller dieser Vektoren für ein festes solches k erfüllt daher die Ungleichung

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{y_j^{(k)}}{\mu^{(k)}} \geq \frac{\xi - \zeta}{\mu^{(k)}} \,.$$

Nach Definition von $\mu^{(k)}$ hat jeder Summand höchstens die Norm eins; da in einem Kompaktum jede Folge eine konvergente Teilfolge hat, gibt es daher für jedes j eine Folge $(k_q)_{q \in \mathbb{N}}$ von Indizes, so daß die Folge der $y_j^{(k_q)} / \mu^{(k_q)}$ gegen einen Grenzwert $y_j^{(0)}$ konvergiert. Wegen der vorausgesetzten Abgeschlossenheit von Y_j liegt dort auch dieser Grenzwert, und die Summe über alle diese Grenzwerte muß wegen obiger Ungleichung und der bestimmten Divergenz der Folge der $\mu^{(k)}$ ein Vektor mit lauter nichtnegativen Komponenten sein. Nach Voraussetzung I.b muß die Summe daher gleich dem Nullvektor sein.

Für jeden einzelnen Produzenten j' ist somit

$$\sum_{j \neq j'} y_j^{(0)} = -y_{j'}^{(0)} \,.$$

Da $0 \in Y_{j'}$, liegt die Summe links in Y. Außerdem liegt auch $y_{j'}$ in Y, denn auch für jedes $j \neq j'$ ist $0 \in Y_j$. Somit liegen sowohl $y_{j'}^{(0)}$ als auch $-y_{j'}^{(0)}$ in Y, was nach Voraussetzung I.c nur möglich ist für $y_{j'}^{(0)} = 0$. Da j' beliebig war, gilt dies für alle Produzenten, für jedes j konvergiert also die Folge der $y_j^{(k_q)} / \mu^{(k_q)}$ gegen den Nullvektor. Somit gibt es höchstens endlich viele Indizes q, für die die Norm von $y_j^{(k_q)}$ gleich $\mu^{(k_q)}$ sein kann.

Da es nur endlich viele Produzenten gibt, kann dann auch nur für endlich viele Werte von q die Norm *irgendeines* Vektors $y_j^{(k_q)}$ gleich $\mu_{(k_q)}$ sein.

Dies widerspricht aber der Definition von $\mu^{(k)}$ als dem Maximum der Normen der Vektoren $y_j^{(k)}$.

Damit führ die Annahme, es gäbe unbeschränkte Mengen $\widehat{Y}_j$ zu einem Widerspruch; zumindest die $\widehat{Y}_j$ sind also allesamt beschränkt und somit kompakt.

Daraus folgt nun leicht auch die Beschränktheit (und Kompaktheit) der $\widehat{X}_i$: Da $z = x - y - \zeta \leq 0$ ist, haben wir für jede Strategie x_i eines Verbrauchers i die Ungleichung

$$\xi_i \leq x_i \leq \sum_{j=1}^{m} y_j - \sum_{i' \neq i} x_{i'} + \zeta$$

für geeignete Strategien $x_{i'} \in X_{i'}$ und $y_j \in Y_j$. Dabei ist natürlich jedes $x_{i'} \geq \xi_{i'}$; außerdem liegen alle y_j in der jeweiligen Teilmenge $\widehat{Y}_j$, denn es gibt ja Strategien für alle anderen Teilnehmer, die $z \leq 0$ machen. Also ist

$$\xi_i \leq x_i \leq \sum_{j=1}^{m} y_j - \sum_{i' \neq i} \xi_{i'} + \zeta \,.$$

Wegen der Beschränktheit der Mengen $\widehat{Y}_j$ ist die rechte Seite beschränkt, also sind auch alle Mengen $\widehat{X}_i$ beschränkt und somit kompakt.

Da es nur endlich viele Mengen $\widehat{X}_i$ und $\widehat{Y}_j$ gibt, können wir eine reelle Zahl c finden, so daß alle diese Mengen im Innern des Würfels

$$W = \left\{ x \in \mathbb{R}^\ell \;\middle|\; \forall h : |x_h| \leq c \right\}$$

liegen. Mit dieser Zahl c definieren wir nun eine neue abstrakte Ökonomie, die alle Voraussetzungen des Satzes von DEBREU erfüllt: Für jeden Verbraucher i und jeden Produzenten j definieren wir

$$\widetilde{X}_i = X_i \cap W \quad \text{und} \quad \widetilde{Y}_j = Y_j \cap W \,.$$

Da $\widehat{X}_i \subset \widetilde{X}_i$ und $\widehat{Y}_j \subset \widetilde{Y}_j$ für alle i, j, liegen für jedes Gleichgewicht der ursprünglichen abstrakten Ökonomie die Strategien der Verbraucher in den Teilmengen $\widetilde{X}_i$ und die der Produzenten in $\widetilde{Y}_j$. Für die Verbraucher modifizieren wir entsprechend auch die Menge der möglichen

Strategien zu $\widetilde{A}_i(x_{-i}) = A_i(x_{-i}) \cap \widetilde{X}_i$. Nach obiger Diskussion ist klar, daß jedes Gleichgewicht der modifizierten Ökonomie auch eines der ursprünglichen ist.

Zum Beweis von Satz 1 müssen wir somit nur noch zeigen, daß diese modifizierte Ökonomie in der Tat, wie behauptet, alle Voraussetzungen des Satzes von DEBREU erfüllt.

Nach I.a und II sind die Mengen X_i und Y_j abgeschlossen und konvex; der Würfel W ist natürlich ebenfalls kompakt und konvex; daher sind die Mengen $\widetilde{X}_i$ und $\widetilde{Y}_j$ kompakt und konvex, genau wie es die Strategiemenge P des Marktteilnehmers ohnehin schon war. Die Stetigkeit der Auszahlungsfunktionen für Verbraucher ist in III.a vorausgesetzt, die der Produzenten und des Marktteilnehmers folgen aus der Linearität dieser Funktionen. Daraus folgt für diese Teilnehmer auch die Konvexität der entsprechenden Mengen $M_{a_{-\iota}}$ aus dem Satz von DEBREU; für Verbraucher garantiert III.c diese Konvexität.

Die Korrespondenzen zur Definition der im Kontext durchführbaren Strategien sind für Produzenten und den Marktteilnehmer konstant, also trivialerweise stetig; da es sich jeweils um die gesamte Strategiemenge handelt, gibt es auch keine Probleme mit der Konvexität.

Im Falle der Verbraucher ist die Konvexität ebenfalls unproblematisch, da die zulässigen Teilmengen $\widetilde{A}_i(x_{-i})$ durch lineare Bedingungen definiert sind. Außerdem ist $\widetilde{A}_i(x_{-i})$ nicht leer, denn nach IV.a gibt es für jeden Verbraucher i eine Strategie $x_i' \in X_i$ mit $x_i' \leq \zeta_i$. Setzen wir $y_j' = 0$ für alle Produzenten j, so ist

$$\sum_{i=1}^{n} x_i' - \sum_{j=1}^{m} y_j' - \zeta \leq 0\,,$$

x_i' liegt also für jeden Verbraucher i in $\widehat{X}_i$ und damit erst recht im Würfel W. Da wir bereits zu Beginn dieses Abschnitts gesehen haben, daß x_i' in $A_i(x_{-i})$ liegt, ist somit $x_i' \in \widetilde{A}_i(x_{-i})$.

Zu zeigen bleibt die Stetigkeit der Korrespondenzen $\widetilde{A}_i$.