Wolfgang K. Seiler A5, C201
Tel. 2515

4. November 2011

9. Übungsblatt Topologie und Gleichgewichte

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*
Eine stetige Abbildung $f: X \to Y$ heißt *nullhomotop,* wenn es einen Punkt $z \in Y$ gibt, so daß f homotop ist zur Abbildung, die jeden Punkt $x \in X$ auf z abbildet.

a) Zeigen Sie: Ist $f: X \to Y$ nullhomotop und Y wegzusammenhängend, so ist f für *jeden* Punkt $y \in Y$ homotop zur konstanten Abbildung mit Bild $\{y\}$!

b) Zeigen Sie: Jede stetige Abbildung eines topologischen Raums in eine konvexe Teilmenge eines $\mathbb{R}^n$ ist nullhomotop.

c) Ein topologischer Raum X ist genau dann zusammenziehbar, wenn die identische Abbildung $\mathrm{id}: X \to X$ nullhomotop ist.

d) Jede konvexe Teilmenge eines $\mathbb{R}^n$ ist nullhomotop.

e) Geben Sie eine fixpunktfreie Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ an! Warum widerspricht die Existenz einer solchen Abbildung nicht der Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes?

Aufgabe 2: *(10 Punkte)*
$f: B^n \to B^n$ sei eine fixpunktfreie Abbildung der Vollkugel auf sich selbst. Dann läßt sich wie folgt eine Abbildung $g: B^n \to B^n$ mit der Randsphäre S^{n-1} als Bild definieren: Man betrachte zu $x \in B^n$ den Strahl von x durch $f(x)$ und definiere $g(x)$ als dessen Schnittpunkt mit $S^{n-1} \subset B^n$.

a) Wenn f stetig ist, ist offensichtlich auch g stetig. Zeigen Sie, daß g homotop ist zur Identität auf B^n.

b) Zeigen Sie, daß die Einschränkung von g zu einer Abbildung $h: S^{n-1} \to S^{n-1}$ surjektiv ist.

c) Zeigen Sie, daß h auch nullhomotop ist.

d) Beweisen Sie so den Brouwerschen Fixpunktsatz!

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*
Für zwei Korrespondenzen $f: X \to\to Y$ und $g: Y \to\to Z$ sei die Hintereinanderausführung definiert als

$$g \circ f: \begin{cases} X \to\to Z \\ x \mapsto \displaystyle\bigcup_{y \in f(x)} g(y) \end{cases} .$$

Zeigen Sie:

a) $(g \circ f)^+(U) = g^+\big(f^+(U)\big)$ für alle Teilmengen $U \subseteq Z$.

b) $(g \circ f)^-(U) = g^-\big(f^-(U)\big)$ für alle Teilmengen $U \subseteq Z$.

c) Sind f und g halbstetig nach oben, so auch $g \circ f$.

d) Sind f und g halbstetig nach unten, so auch $g \circ f$.

Abgabe bis zum Freitag, dem 11. November 2011, um 12.00 Uhr