Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

28. Oktober 2011

8. Übungsblatt Topologie und Gleichgewichte

Aufgabe 1: *(4 Punkte)*
Zeigen Sie, daß die Homotopie von Abbildungen eine Äquivalenzrelation ist!

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*
Zwei topologische Räume X, Y heißen *homotop,* in Zeichen $X \simeq Y$, wenn es stetige Abbildungen $f: X \to Y$ und $g: Y \to X$ gibt derart, daß $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ und $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ ist. Zeigen Sie:

a) Das ist eine Äquivalenzrelation.
b) Ist $X \simeq Y$ für zwei kompakte triangulierbare Räume X, Y, so ist $H_q(X) \cong H_q(Y)$ für alle q.
c) Der Zylinder
$$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ und } |z| \le 1\}$$
ist homotop zu S^1.
d) $\mathbb{R}^n$ ist homotop zu einer einelementigen Menge.

Aufgabe 3: *(8 Punkte)*
$f: S^n \to S^n$ sei eine stetige Abbildung. Zeigen Sie:

a) Es gibt mindestens einen Punkt $P \in S^n$, so daß entweder $f(P) = P$ ist oder aber P nicht im Bild von f liegt.
b) Ist $g: S^n \to S^n$ eine weitere stetige Abbildung, so ist $\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g)$.
c) Ist n gerade und f homotop zur identischen Abbildung, so ist f surjektiv und hat mindestens einen Fixpunkt.
d) Finden Sie eine fixpunktfreie Abbildung $f: S^1 \to S^1$, die homotop zur Identität ist!

Abgabe bis zum Freitag, dem 4. November 2011, um 12.00 Uhr