

14. Oktober 2011

## 6. Übungsblatt Topologie und Gleichgewichte

### Aufgabe 1: (3 Punkte)

Ein simplizialer Komplex  $K$  heißt zusammenhängend, wenn je zwei Ecken von  $K$  durch einen Kantenzug verbunden werden können. Zeigen Sie:  $K$  ist genau dann zusammenhängend, wenn der topologische Raum  $|K|$  zusammenhängend ist.

### Aufgabe 2: (5 Punkte)

Der KRONECKER-Index einer 0-Kette  $\sum_{i=1}^r \alpha_i v_i$  eines simplizialen Komplexes  $K$  mit Ecken  $v_i$  ist  $\sum_{i=1}^r \alpha_i$ . Zeigen Sie:

- Ist  $K$  zusammenhängend, so ist eine 0-Kette genau dann ein Rand, wenn ihr KRONECKER-Index verschwindet.
- Zwei 0-Zykeln eines zusammenhängenden simplizialen Komplexes liegen genau dann in derselben Homologiekategorie, wenn sie denselben KRONECKER-Index haben.
- Für einen zusammenhängenden simplizialen Komplex  $K$  ist  $H^0(K) \cong \mathbb{Z}$ .

### Aufgabe 3: (2 Punkte)

Finden Sie ein Beispiel für drei simpliziale Abbildungen  $\varphi, \psi, \chi: K \rightarrow L$  zwischen zwei simplizialen Komplexen derart, daß zwar  $\varphi$  und  $\psi$  sowie  $\psi$  und  $\chi$  benachbart sind, nicht aber  $\varphi$  und  $\chi$ !

### Aufgabe 4: (5 Punkte)

$K$  sei der simpliziale Komplex, der aus den Ecken und Kanten eines Dreiecks besteht.

- Wie viele simpliziale Abbildungen  $K \rightarrow K$  gibt es?
- Zwei simpliziale Abbildungen  $\varphi, \psi$  zwischen zwei simplizialen Komplexen gehören zur gleichen Nachbarschaftsklasse, wenn es eine Folge  $\varphi = \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_r = \psi$  von simplizialen Abbildungen gibt derart, daß  $\varphi_i$  für jedes  $i < r - 1$  zu  $\varphi_{i+1}$  benachbart ist. Finden Sie die Nachbarschaftsklassen unter den simplizialen Abbildungen aus a)!

### Aufgabe 5: (5 Punkte)

Die Kettenabbildungen  $\varphi, \varphi': \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  und  $\psi, \psi': \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  zwischen den Kettenkomplexen  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  und  $\mathcal{E}$  seien homotop. Zeigen Sie, daß dann auch die Hintereinanderausführungen  $\psi \circ \varphi$  und  $\psi' \circ \varphi'$  homotope Kettenabbildungen zwischen  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{E}$  sind!

Abgabe bis zum Freitag, dem 21. Oktober 2011, um 12.00 Uhr