Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

7. Oktober 2011

5. Übungsblatt Topologie und Gleichgewichte

Aufgabe 1: *(4 Punkte)*

a) Finden Sie eine echte Untergruppe von $\mathbb{Z}^2$, die selbst Rang zwei hat!

b) Zeigen Sie: Für jede solche Untergruppe $H < \mathbb{Z}^2$ ist die Faktorgruppe $\mathbb{Z}^2/H$ endlich.

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

Der abstrakte simpliziale Komplex $\mathfrak{K}$ bestehe aus n Ecken $P_1, \ldots, P_n$, den Kanten P_iP_{i+1} für $i = 1, \ldots, n-1$ und P_1P_i für $i = 2, \ldots, n$, sowie den Dreiecken $\triangle P_1P_iP_{i+1}$ für $i = 2, \ldots, n-1$.

a) Skizzieren Sie für $n = 6$ eine geometrische Realisierung dieses Komplexes in $\mathbb{R}^2$!

b) Bestimmen Sie die Ränge aller Ketten-, Zykel- und Rändergruppen!

c) Berechnen Sie die Homologiegruppen von $\mathfrak{K}$!

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Konstruieren Sie die erste baryzentrische Unterteilung $\mathfrak{K}'$ des Komplexes $\mathfrak{K}$ aus der vorigen Aufgabe! (Skizze der geometrischen Realisierung genügt.)

b) Der Komplex $\mathfrak{M}$ entstehe aus $\mathfrak{K}'$ durch Weglassen aller Dreiecke. Berechnen Sie den Rang der ersten Homologiegruppe von $\mathfrak{M}$!

c) Ist $\mathfrak{M}$ die baryzentrische Unterteilung des Komplexes $\mathfrak{L}$ aus der vorigen Aufgabe?

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*

a) $\mathfrak{K}$ sei der abstrakte simpliziale Komplex bestehend aus einem 3-Simplex s und seinen sämtlichen Seitensimplizes. Bestimmen Sie die Homologiegruppen von $\mathfrak{K}$!

b) $\mathfrak{L}$ sei der Teilkomplex von $\mathfrak{K}$ bestehend aus allen Simplizes von $\mathfrak{K}$ mit Ausnahme von s. Bestimmen Sie die Homologiegruppen von $\mathfrak{L}$!

Abgabe bis zum Freitag, dem 14. Oktober 2011, um 12.00 Uhr