

16. September 2011

2. Übungsblatt Topologie und Gleichgewichte

Aufgabe 1: (10 Punkte)

X und Y seien topologische Räume und $X \times Y$ trage die Produkttopologie. Zeigen Sie:

- Die Projektionen $p_1: X \times Y \rightarrow X$ und $p_2: X \times Y \rightarrow Y$ sind stetig.
- Sind X und Y HAUSDORFFsch, so auch $X \times Y$.
- Sind X und Y 1-abzählbar, so auch $X \times Y$.
- Sind X und Y HAUSDORFFsch und 1-abzählbar und ist $f: X \rightarrow Y$ stetig, so ist der Graph

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\} \subseteq X \times Y$$

abgeschlossen.

- Ist X HAUSDORFFsch und 1-abzählbar und ist $f: X \rightarrow X$ stetig, so ist die Menge

$$\{x \in X \mid f(x) = x\}$$

der Fixpunkte von f abgeschlossen.

Aufgabe 2: (5 Punkte)

- X sei eine Menge mit mindestens zwei Elementen; sie sei mit der diskreten Topologie versehen. Ist X HAUSDORFFsch, 1-abzählbar, zusammenhängend und/oder kompakt? Unter welcher Bedingung ist X quasikompakt?
- ditto* für die triviale Topologie.

Aufgabe 3: (5 Punkte)

- $f: X \rightarrow Y$ sei eine surjektive stetige Abbildung zwischen zwei topologischen Räumen. Zeigen Sie: Wenn X wegzusammenhängend ist, dann auch Y .
- Zeigen Sie: Das Produkt $X \times Y$ zweier wegzusammenhängender Räume X und Y ist wegzusammenhängend.
- Gilt dies auch für zusammenhängende Räume? (*Hinweis: Für jeden Punkt $x \in X$ ist $\{x\} \times Y$ homöomorph zu Y .*)

Abgabe bis zum Freitag, dem 23. September 2011, um 12.00 Uhr