Wolfgang K. Seiler A5, C201
Tel. 2515

9. September 2011

1. Übungsblatt Topologie und Gleichgewichte

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß die Teilmenge

$$X = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1 \text{ und } y \neq 1 \right\}$$

von $\mathbb{R}^2$ homöomorph zu $\mathbb{R}$ ist!

b) Zeigen Sie, daß keine zwei der folgenden vier Teilmengen von $\mathbb{R}$ homöomorph sind:

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}, & B &= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x^2 < 3\}, \\ C &= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 3\}, & D &= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x^2 \leq 3\} \end{aligned}$$

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

X sei eine Menge und $\mathcal{A}$ eine Menge von Teilmengen von X, für die gilt:
1. $\emptyset \in \mathcal{A}$ und $X \in \mathcal{A}$
2. Der Durchschnitt beliebig vieler Mengen aus $\mathcal{A}$ liegt wieder in $\mathcal{A}$.
3. Die Vereinigung zweier Mengen aus $\mathcal{A}$ liegt wieder in $\mathcal{A}$.

Zeigen Sie, daß X zum topologischen Raum wird mit der Menge

$$\mathcal{O} = \left\{ U \subseteq X \;\middle|\; X \setminus U \in \mathcal{A} \right\}!$$

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ sei mit der Spurtopologie versehen. Entscheiden Sie für jede der folgenden Mengen, ob sie offen, abgeschlossen, beides oder keins von beiden ist:

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 2 < x < 3\}, \quad B = \{x \in \mathbb{Q} \mid 2 < x^2 < 3\}, \quad C = \{1\}, \quad D = \mathbb{Z}$$

b) Zeigen Sie: Die Spurtopologie von $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ ist die diskrete Topologie!

Aufgabe 4: *(4 Punkte)*

X sei ein topologischer Raum und $f : X \to Y$ sei eine surjektive Abbildung. Wir definieren die *Quotiententopologie* auf Y durch die Vorschrift, daß $U \subseteq Y$ genau dann offen sein soll, wenn $f^{-1}(U) \subseteq X$ offen ist. Zeigen Sie, daß dies in der Tat eine Topologie definiert!

Abgabe bis zum Freitag, dem 16. September 2011, um 12.00 Uhr