Seminar über die Mathematik des Bundestagswahlrechts

Laut Mannheimer Morgen vom Dienstag, dem 16. August 1949, zogen bei der ersten Bundestagswahl zehn Parteien, der gemeinsame Abgeordnete der deutschen Parteien in Flensburg, sowie zwei Unabhängige, darunter Richard Freudenberg für den Wahlkreis Mannheim-Land, in den Bundestag ein. Die Stimmenzahlen und Mandate dieser Parteien sind in der folgenden Tabelle zusammengefaßt:

Partei	Stimmen		Mandate	Quotient
CDU	7 358 250	31,0%	139	52937,05
SPD	6 932 223	29,2%	131	52917,73
FDP	2 828 391	11,9%	52	54392,13
KPD	1 360 468	5,7%	15	90697,87
Bayernpartei	986 606	4,2%	17	58035,65
Deutsche Partei	940 088	4,0%	17	55299,29
Zentrum	727 449	3,1%	10	72744,90
WAV	681 981	2,9%	12	56830,08
Deutsche Rechtspartei	428 557	1,8%	5	85711,40
Südschleswig. WV	75 387	0,3%	1	75387,00

Die Wahl fand auch damals nach einem personalisierten Verhältniswahlrecht statt. Trotzdem hat beispielsweise die KPD über ein Drittel mehr Stimmen als die Bayernpartei, bekommt aber zwei Mandate weniger, und die Anzahl der Stimmen pro Mandat schwankt zwischen 52917,73 für die SPD und 90697,87 für die KPD. Wie kann es zu so einem Ergebnis kommen?

Die Antwort liegt natürlich im Wahlsystem. Der Hauptunterschied zum heutigen System lag darin, daß es damals keine globale 5%-Hürde gab, sondern daß in jedem der elf Bundesländer nur die Parteien Mandate erhielten, die *dort* auf mindestens 5% kamen oder mindestens ein Direktmandat erhielten. Die großen Parteien schafften das überall, die KPD scheiterte in Baden, Bayern, Niedersachsen und Schleswig-Holstein, so daß ihre dortigen Stimmen nicht zu Mandaten führten, obwohl die Partei bundesweit 5,4% der Stimmen holte. Außer CDU, SPD, FDP und KPD kam keine Partei bundesweit auf mehr als fünf Prozent, allerdings holte beispielsweise die Bayernpartei in Bayern elf Direktmandate, so daß sie auch nach heutigem Wahlrecht in den Bundestag eingezogen wäre, denn nun müssen bundestweit mindestens fünf Prozent der Stimmen erreicht werden oder mindestens drei Direktmandate.

In diesem Seminar soll es darum gehen, wie aus den Stimmenanzahlen die Mandate für die einzelnen Parteien möglichst gerecht bestimmt werden können, insbesondere auch bezüglich des Wahlrechts zum Deutschen Bundestag.

Das Bundestagswahlrecht ist ein personalisiertes Verhältniswahlrecht. Jeder Wähler hat (abgesehen von der allerersten Bundestagswahl) *zwei* Stimmen. Die Bundesrepublik ist aufgeteilt in derzeit 299 Wahlkreise. In jedem davon kann jede zugelassene Partei einen Kandidaten aufstellen; außerdem können auch Einzelbewerber antreten. Gewählt ist der Kandidat, der die meisten Erststimmen auf sich vereinigt hat.

Über die Anzahl der Mandate für jede Partei entscheiden die Zweitstimmen, für die der Grundsatz der Verhältniswahl gilt, d.h. die Anzahl der Mandate einer jeden Partei sollte proportional sein zur Anzahl der erhaltenen Zweitstimmen. Dazu kommt allerdings noch eine Sperrklausel: Berücksichtigt werden (nach derzeitigem Recht) nur Parteien, die mindestens fünf Prozent der abgegebenen Stimmen erhielten *oder* mindestens drei Direktmandate gewannen. Außerdem werden nach der derzeitigen Fassung des Bundeswahlgesetzes die Zweitstimmen derjenigen Wähler nicht berücksichtigt, die mit ihrer Erststimme erfolgreich einen parteiunabhängigen Wahlkreisbewerber gewählt haben oder aber den Bewerber einer Partei, die an der Zulassungshürde gescheitert ist.

Nehmen wir an, daß r Parteien die Zulassungshürde überwunden haben; ihre Zweitstimmenanzahlen seien $v_1, \dots, v_r$ (wobei im Falle erfolgreicher Einzelbewerber die Zweitstimmen von dessen Wählern nicht mitgezählt werden). Die Anzahl der zu berücksichtigenden Stimmen ist also $v_+ = v_1 + \cdots + v_r$. Die Anzahl der im Hohen Haus zu besetzenden Sitze sei h. Im (noch nie eingetretenen) einfachsten Fall, daß es weder Überhangmandate noch erfolgreiche Einzelbewerber gibt, ist $h = 2 \cdot 299 = 598$. Bei einer Verhältniswahl sollte die Anzahl m_i der Mandate einer Partei proportional sein zur Anzahl v_i ihrer Stimmen, d.h. idealerweise sollte

$$m_i = \widetilde{m}_i \underset{\text{def}}{=} \frac{v_i h}{v_+}$$

sein. Das Problem besteht darin, daß $\widetilde{m}_i$ praktisch nie ganzzahlig sein wird. Ein Wahlverfahren muß daher eine Vorschrift liefern, wie aus den r nichtnegativen reellen Zahlen $\widetilde{m}_1, \dots, \widetilde{m}_r$ nichtnegative ganze Zahlen $m_1, \dots, m_r$ berechnet werden derart, daß $m_i \approx \widetilde{m}_i$ und $m_1 + \cdots + m_r = h$ ist.

Dazu gibt es eine Vielzahl von Verfahren mit noch mehr (meist historisch völlig falschen) Namen. Sie zerfallen im wesentlichen in zwei Klassen, nämlich Quotenverfahren und Divisorverfahren.

Beginnen wir mit den Quotenverfahren. Hier wird m_i stets so gewählt, daß $|m_i - \widetilde{m}_i|$ für jedes i kleiner als eins ist und natürlich die Summe aller m_i gleich h. Ein solches Verfahren, das Verfahren von HARE-NIEMEYER, wurde bei den Bundestagswahlen von 1987 bis 2005 angewandt. Hier wird in einem ersten Schritt jedes m_i auf den ganzzahligen Anteil von $\widetilde{m}_i$ gesetzt, und natürlich ist danach praktisch immer die Summe aller m_i kleiner als h. In den nächsten Schritten werden sukzessive einzelne m_i um eins erhöht, bis die Summe aller m_i gleich h ist. Das jeweils zu erhöhende m_i wird folgendermaßen ausgewählt: Man berechnet für jede Partei i die Differenz $\widetilde{m}_i - m_i$ und wählt dasjenige i, für das diese Differenz am größten ist. Für dieses i wird m_i durch $m_i + 1$ ersetzt. (Falls es mehr als ein i mit maximaler Differenz gibt, muß gelost werden – es sei denn, es gibt noch genügend viele zu besetzende Plätze, um alle diese i zu berücksichtigen.) Da nach der Erhöhung die Differenz $\widetilde{m}_i - m_i$ negativ wird und $h - \sum m_i$ zu Beginn kleiner als r war, ist sichergestellt, daß kein m_i zweimal erhöht wird; m_i ist also in jedem Fall entweder der abgerundete oder der aufgerundete Wert von $\widetilde{m}_i$.

Bis zur Bundestagswahl von 1983 und ab der Bundestagswahl von 2009 wurden sogenannte Divisorverfahren angewandt. Die ideale Mandatszahl $\widetilde{m}_i$ entsteht aus der Stimmenanzahl v_i durch Multiplikation mit h/v_+ oder, da dies eine sehr kleine Zahl ist, durch Division durch v_+/h. Bei Divisormethoden ersetzt man v_+/h durch einen anderen Divisor D und wählt eine Rundungsfunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ derart, daß

$$\sum_{i=1}^{r} f\left(\frac{v_i}{D}\right) = h$$

ist. Bis 1983 war $f(x) = [x]$, d.h. gerundet wurde durch Abschneiden. Dieses Verfahren ist in Deutschland bekannt als die D'HONDTsche Höchstzahlmethode. Seit 2009 wird die kaufmännische Rundung $f(x) = [x + \frac{1}{2}]$ verwendet; dies bezeichnet man (in Deutschland) als die Methode von SAINTE-LAGUË.

Ganz wie beschrieben funktioniert das Verfahren allerdings nicht: Es kann durchaus vorkommen, daß es keinen Divisor D gibt, der die obige Bedingung erfüllt. Falls beispielsweise nur zwei Parteien antreten, die beide auf exakt die gleiche Anzahl von Stimmen kommen, und wenn die Hausgröße h ungerade ist, ist für jeden Divisor D und jede Rundungsfunktion f

$$f\left(\frac{v_1}{D}\right) + f\left(\frac{v_2}{D}\right) = 2f\left(\frac{v_1}{D}\right)$$

gerade und damit ungleich h. Die obige Bedingung muß also gelockert werden.

Speziell bei der kaufmännischen Rundung ist nicht wirklich ersichtlich, warum für eine natürliche Zahl n die Zahl $n + \frac{1}{2}$ auf $n + 1$ aufgerundet werden soll statt auf n abgerundet. In der Tat war es bei den Astronomen seit langer Zeit üblich (und ist es vielleicht immer noch), in so einem Fall auf die gerade der beiden Zahlen n und $n + 1$ zu runden. Auch bei anderen Rundungsfunktionen gibt es stets Punkte, an denen die Funktion um eins nach oben springt. Diese Unstetigkeitsstellen oder Sprungstellen sind offensichtliche Kandidaten dafür, daß man hier willkürlich entweder nach oben oder nach unten runden kann. Wir betrachten daher zu einer Rundungsfunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ deren Sprungstellen

$$s_f(n) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = n\}$$

und definieren *Mengen*

$$[[x]]_f = \begin{cases} \{n\} & \text{falls } x \in \Big(s_n(f), s_{n+1}(f)\Big) \\ \{n-1, n\} & \text{falls } x = s_n(f) \end{cases} .$$

Die abgeschwächte Bedingung lautet nun: Finde zu einer vorgegebenen Rundungsfunktion f einen Divisor D und Zahlen $m_i \in \mathbb{N}_0$ derart, daß

$$\sum_{i=1}^{r} m_i = h \quad \text{und} \quad m_i \in \big[\big[v_i/D\big]\big]_f \quad \text{für alle } i\,.$$

Auch da ist natürlich nicht klar, ob es erstens einen geeigneten Divisor gibt, und ob zweitens verschiedene solche Divisoren zum gleichen Wahlergebnis führen.

Tatsächlich ist (abgesehen von seltenen Fällen, in denen gelost werden muß) beides der Fall, denn es gibt auch eine alternative Interpretation der Verfahren, die von der Wahl des Divisors unabhängig ist und von der auch der Name „Höchstzahlmethode“ stammt. Hier wird jeder Partei i mit Stimmenzahl v_i die Folge der Zahlen

$$\frac{v_i}{s_f(0)}, \quad \frac{v_i}{s_f(1)}, \quad \frac{v_i}{s_f(2)}, \quad \ldots$$

zugeordnet. Im Falle von D'HONDT sind das also die Zahlen $v_i, v_i/2, v_i/3, \ldots$; im Falle von SAINTE-LAGUË $v_i/\frac{1}{2}, v_i/\frac{3}{2}, v_i/\frac{5}{2}, \ldots$. Der erste Sitz geht an die Partei, die den höchsten Anfangswert in ihrer Folge hat; danach wird dieser Wert gestrichen. In jedem weiteren Schritt erhält die Partei mit dem höchsten aktuellen Anfangswert den nächsten Sitz, und auch dieser Anfangswert wird gestrichen. Das Verfahren endet, wenn alle h Sitze vergeben sind. Falls einmal mehrere Parteien den gleichen Anfangswert haben und nicht mehr genügend Sitze zur Verfügung stehen, wird gelost.

Angenommen, der letzte Sitz geht an Partei i, die damit auf insgesamt p Sitze kommt. Dann war der Anfangswert ihrer Folge vor dieser Zuteilung $v_i/s_f(p)$. Nach Streichen dieses Werts sei der neue größte Anfangswert der von Partei j mit $v_j/s_f(q)$. Für jede Zahl D mit $v_j/s_f(q) \le D < v_i/s_f(p)$ gilt dann: Die Anzahl der Sitze für Partei k ist die größte Zahl m mit der Eigenschaft $v_k/s_f(m) \ge D$. (Falls $v_j/s_f(q) = v_i/s_f(p)$ ist, gilt dies für $D = v_i/s_f(p)$.) Dies führt auf die Ungleichung $s_f(m_k) \le v_k/D < s_f(m_k + 1)$, das heißt $m_k = f(v_k/D)$.

Um einen Eindruck über die Vor- und Nachteile der verschiedenen Systeme zu bekommen, müssen wir uns überlegen, welche Forderungen wir an ein Wahlsystem stellen.

Eine offensichtliche Forderung ist beispielsweise, daß eine Partei nicht weniger Sitze bekommt, wenn die Anzahl der zu vergebenden Sitze vergrößert wird: Gibt das Wahlverfahren also bei eine Hausgröße h der i-ten Partei m_i Mandate, und ist diese Zahl bei einer Hausgröße $H > h$ gleich M_i, so muß $M_i \geq m_i$ sein. In den USA werden Verhältniswahlsysteme auch verwendet, um die Anzahl der Sitze jedes Bundesstaats im House of Representatives zu berechnen. (Entsprechend wurden bisher auch in Deutschland die Sitze im Bundestag bestimmt, die jedem Land zustehen.) Ursprünglich wurde dazu das Verfahren von D'HONDT verwendet. Die Verschiebungen nach jeder neuen Volkszählung zeigten deutlich, daß hier diese Bedingung nicht erfüllt ist.

Bei jeder Wahl gibt es Parteien, die durch das Wahlverfahren bevorzugt wurden, für die also $m_i/h > v_i/v_+$ ist, und benachteiligte mit $m_i/h < v_i/v_+$. Dies ist unvermeidbar. Vermieden sollte allerdings werden, daß es fast immer die gleichen Parteien sind, die bevorzugt oder benachteiligt werden. Bei D'HONDT werden große Parteien systematisch bevorzugt.

Ein verwandtes Problem ist das Mehrheitsproblem: Falls eine Koalition aus mehreren Parteien die Mehrheit der Stimmen hat, sollte sie auch die Mehrheit der Mandate bekommen. Im Bundestag werden die Ausschußsitze gemäß Fraktionsstärken vergeben; zu Beginn nach dem Verfahren von D'HONDT. Als die sozialliberale Koalition an die Macht kam und mehrere ihrer Abgeordneten zur CDU/CSU überliefen, hatte die Koalition zwar noch eine Mehrheit im Bundestag, aber nicht mehr in allen Ausschüssen. Da dies die Parlamentsarbeit stark behindert, beschloß man damals, für die Besetzung der Ausschüsse zum Verfahren von HARE-NIEMEYER überzugehen, das bald darauf auch für Bundestagswahlen verwendet wurde. (Heute wird in beiden Fällen das Verfahren von SAINTE-LAGUË verwendet.)

Man kann ein Wahlverfahren auch an der Methode der kleinsten Quadrate messen: Ein Ziel sollte es sein, daß

$$\sum_{i=1}^{r} \left(\frac{v_i}{v_+} - \frac{m_i}{h} \right)^2$$

möglichst klein ist.

Bei der Wahl zum Deutschen Bundestags hat jeder Wähler seit 1953 zwei Stimmen. Mit der Erststimme wird ein Wahlkreiskandidat gewählt, die Zweitstimme entscheidet über die Anzahl der Mandate jeder Partei. Mit der zunehmenden Anzahl der Parteien wurde der Prozentsatz der Stimmen, der zum Sieg in einem Wahlkreis ausreicht, immer geringer, und es kam immer häufiger vor, daß eine Partei mehr Direktmandate gewann, als ihr insgesamt Sitze zustanden. Bei den ersten Bundestagswahlen wurden diese Überhangsmandate der jeweiligen Partei einfach als weitere Sitze zugeteilt, womit diese Parteien überrepräsentiert waren. Seither gibt es ständig neue Ansätze, einerseits eine halbwegs gerechte Sitzverteilung und andererseits einen nicht zu riesigen Bundestag zu haben. Erschwerend kommt dazu, daß nicht nur die Mandate der Parteien den Stimmanzahlen entsprechen müssen, sondern auch noch die Mandate aus jedem Bundesland der Bevölkerungszahl dieses Bundeslands. Somit müssen bei Überhangmandaten Ausgleichsmandate im gleichen Bundesland geschaffen werden und gleichzeitig muß auch noch darauf geachtet werden, daß bundesweit die Mandate den Stimmenverhältnissen entsprechen. Dies führte in den letzten Legislaturperioden zu einer immer größeren Aufblähung des Bundestags, was eine efiziente Parlamentsarbeit erschwerte.

Für die Bundestagswahl 2021 wurde als erster vorläufiger Kompromiss das Prinzip der doppelten Proportionalität in Bezug auf die Bundesländer gelockert: Für jedes Bundesland wird einerseits die Anzahl der Direktmandate ermittelt, andererseits die Anzahl der Mandate nach Zweitstimmenanteil. Mindestanzahl der Mandate im Land ist nun aber nicht mehr das Maximum dieser beiden Zahlen, sondern das Maximum aus Direktmandaten und aus *der Hälfte* der nach Zweitstimmenergebnis zustehenden Mandate. Die übrigen Mandate können mit Wahlkreisgewinnern aus anderen Bundesländern besetzt werden, sofern deren Anzahl dort größer ist als die Anzahl der dem Land auf Grund der Zweitstimmen zustehenden Mandate. Außerdem bleiben bis zu drei überhangsmandaten unausgeglichen, was natürlich die großen Parteien begünstigt. Das 25. Gesetz zur Änderung des Bundeswahlgesetzes schreibt allerdings gleichzeitig vor, daß der nächste Bundestag eine neue Regelung finden soll, bei der die Anzahl der Wahlkreise aus 280 reduziert wird (was die Anzahl der Überhangsmandate veringert) und weitere Mäsnahmen zur Reduzierung der Abgeordnetenzahl diskutieren soll.