WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

14. Mai 2018

11. Übungsblatt Reell-algebraische Geometrie

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Es gibt eine semialgebraische Menge $X \subset \mathbb{R}^6$, so daß drei Punkte $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2$ und $P_3 = (x_3, y_3)$ aus $\mathbb{R}^2$ genau dann auf einer Geraden liegen, wenn der Punkt $Q = (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$ in X liegt.

b) Es gibt auch eine semialgebraische Menge $Y \subset \mathbb{R}^6$, so daß die Strecken $\overline{P_1P_2}$ und $\overline{P_2P_3}$ genau dann einen rechten Winkel bei P_2 bilden, wenn Q in Y liegt.

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

Nach einem Satz aus der Elementargeometrie schneiden sich die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks in einem Punkt. Zeigen Sie, daß diese Aussage äquivalent dazu ist, daß eine gewisse semialgebraische Menge nicht leer ist!

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Es gibt semialgebraische Mengen M_0, M_1 und $M_2 \subset \mathbb{R}^6$, so daß sich die Kreise um $P_1 = (x_1, y_1)$ mit Radius r_1 und um $P_2 = (x_2, y_2)$ mit Radius r_2 genau dann in i Punkten schneiden, wenn $Q = (x_1, y_1, r_1, x_2, y_2, r_2)$ in M_i liegt.

b) Beschreiben Sie $\mathbb{R}^6 \setminus (M_1 \cup M_2 \cup M_3)$ in möglichst einfacher Form als semialgebraische Menge!

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*

Welche der folgenden semialgebraischen Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ ist eine Mannigfaltigkeit?

a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$
b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\}$
c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$
d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 = 4\}$
e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 > 4\}$
f) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \geq 4\}$
g) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + y^2 = 0\}$
h) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + y^2 \neq 0\}$
i) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + y^2 \geq 0\}$

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 16. Mai 2018, um 12.00 Uhr