Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

25. April 2018

9. Übungsblatt Reell-algebraische Geometrie

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

a) Vollziehen Sie den Beweis des Struktursatzes explizit nach am Beispiel der Kurve

$$X = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y^2 = x\right\} !$$

b) Welche der Zerlegungsmengen des $\mathbb{R}^2$ könnte man für eine effizientere Zerlegung vereinigen?

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

a) Stellen Sie den Würfel $W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; |x| \le 1, |y| \le 1, |z| \le 1\right\}$ als semialgebraische Menge dar!

b) Finden Sie eine Zerlegung von $\mathbb{R}^3$ für W gemäß dem ersten Struktursatz!

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

Finden Sie für die Sphäre $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$ eine Zerlegung des $\mathbb{R}^3$, die den Bedingungen des ersten Struktursatzes genügt!

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*

Für $m \in \mathbb{N}$ sei $W_m = (0, 1)^m$ der m-dimensionale Würfel; für $m = 0$ setzen wir formal $W_0 = \{0\}$. Weiter sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine semialgebraische Menge. Zeigen Sie:

a) Ist $\mathcal{I} = \{A_1, \dots, A_r\}$ eine Zerlegung des $\mathbb{R}^n$ für X gemäß dem Struktursatz, so gibt es für jedes A_i ein m_i und eine bijektive stetige Abbildung $\varphi_i\colon W_{m_i} \to A_i$.

b) Auch die Umkehrabbildung φ_i^{-1} ist stetig.

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 2. Mai 2018, um 12.00 Uhr