

19. April 2018

8. Übungsblatt Reell-algebraische Geometrie

Aufgabe 1: (4 Punkte)

- Zeigen Sie: Jede semialgebraische Teilmenge von \mathbb{R} ist eine endliche Vereinigung von (eventuell unendlichen) Intervallen und einpunktigen Mengen.
- Ist umgekehrt auch jede endliche Vereinigung von Intervallen und einpunktigen Mengen semialgebraisch?

Aufgabe 2: (6 Punkte)

- Berechnen Sie die Resultante sowie die sämtlichen Subresultanten der beiden Polynome $f = X^2 + pX + q$ und $g = X^2 - c$!
- Begründen Sie, warum die Resultante genau dann verschwindet, wenn $f(\sqrt{c})$ oder $f(-\sqrt{c})$ verschwindet, und übersetzen Sie diese Bedingung in eine Polynomgleichung in den drei Variablen p, q und c !
- Was können Sie über die Nullstellen von f sagen wenn die Subresultante $r_1(f, g)$ verschwindet?
- Welche weiteren Informationen haben Sie, wenn zusätzlich auch noch $\text{Res}_X(f, g)$ verschwindet?

Aufgabe 3: (5 Punkte)

- Die Menge \mathcal{F} bestehe aus dem Polynom $f = X^3 - 9X$ und seinen sämtlichen Ableitungen. Bestimmen Sie für alle Quadrupel $(R_0, R_1, R_2, R_3) \in \{<, =, >\}^4$ die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die die i -te Ableitung von f an der Stelle x in Relation R_i zur Null steht!
- Wie sehen die entsprechenden Mengen aus für $\mathcal{F} = \{\sin x, \cos x, -\sin x, -\cos x\}$?

Aufgabe 4: (5 Punkte)

Eine algebraische Varietät über einem Körper k ist eine Menge der Form

$$V = \{x \in k^n \mid f_1(x) = \dots = f_r(x) = 0\}$$

für eine endliche Anzahl von Polynomen $f_1, \dots, f_r \in k[x_1, \dots, x_n]$. Zeigen Sie:

- Die Vereinigung zweier algebraischer Varietäten ist wieder eine algebraische Varietät.
- Der Durchschnitt zweier algebraischer Varietäten ist wieder eine algebraische Varietät.
- Für jeden Körper k gibt es Varietäten $V \subset k^n$ derart, daß

$$W = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in k^{n-1} \mid \exists x_n \in k: (x_1, \dots, x_n) \in V\}$$

keine Varietät ist.

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 24. April 2018, um 12.00 Uhr