Wolfgang K. Seiler A5, C201
Tel. 2515

11. April 2018

7. Übungsblatt Reell-algebraische Geometrie

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Ein topologischer Raum X ist genau dann zusammenhängend, wenn es außer $\emptyset$ und X keine weitere Teilmenge gibt, die sowohl offen als auch abgeschlossen ist.

b) Skizzieren Sie die folgenden Mengen und entscheiden Sie (mit Beweis), ob sie zusammenhängend sind oder nicht:

$$\begin{aligned} X_1 &= \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < |x| \le 2\}, \\ X_2 &= \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| \le 2\}, \\ X_3 &= \{z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Re}\, z \in \mathbb{Q} \ \text{ und } \ \mathfrak{Im}\, z \in \mathbb{Q}\} \end{aligned}$$

Aufgabe 2: *(6 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß es für jedes n eine injektive Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^{n+1}$ gibt, deren Bild die Menge $B_1^n \cap \{a \in \mathbb{C}^{n+1} \mid a_n = 1\}$ ist!

b) Geben Sie diese Abbildung explizit an!

c) Beschreiben Sie M_n^n durch Polynomgleichungen und -ungleichungen!

Aufgabe 3: *(9 Punkte)*

a) Was ist das Komplement von $B_2^2(\mathbb{R}) \cup B_1^2(\mathbb{R})$ in $\mathbb{R}^3$?

b) Geben Sie die Teilmengen $M_2^2(\mathbb{R})$ und $M_1^2(\mathbb{R})$ von $\mathbb{R}^3$ explizit an!

c) Wie sehen die Funktionen f_1, f_2, die die Nullstellen liefern, in der Umgebung eines Punktes $a \in M_2^2(\mathbb{R})$ aus?

d) Wie sieht die Funktion f, die die Nullstelle liefert, in der Umgebung eines Punktes a aus $M_1^2(\mathbb{R})$ aus?

e) Bestimmen Sie jeweils die Teilmengen, auf denen es reelle Lösungen gibt, sowie die Funktionen, die diese liefern!

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 18. April 2018, um 12.00 Uhr