Wolfgang K. Seiler
*Tel.* 2515

A5, C201

*16. März 2018*

# 5. Übungsblatt Reell-algebraische Geometrie

**Aufgabe 1:** *(5 Punkte)*
Schreiben Sie das Polynom $X^3 + Y^3 + Z^3$ als Polynom in den elementarsymmetrischen Funktionen in $X, Y$ und $Z$ !

**Aufgabe 2:** *(5 Punkte)*

*a)* Die *Diskriminante* eines Polynoms $n$-ten Grades mit (nicht notwendigerweise verschiedenen) Nullstellen $z_1, \dots, z_n$ ist

$$\Delta = \prod_{i<j} (z_i - z_j)^2 .$$

Berechnen Sie $\Delta$ für ein Polynom vom Grad zwei anhand einer Lösungsformel für quadratische Gleichungen!

*b)* Bestimmen Sie die Diskriminante des kubischen Polynoms $X^3 + pX + q$ !

**Aufgabe 3:** *(3 Punkte)*
Es gibt ein Polynom $f \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_{26}]$ mit der Eigenschaft, daß $p \in \mathbb{N}$ genau dann eine Primzahl ist, wenn die Gleichung $f(x_1, \dots, x_{25}, p) = 0$ eine Lösung in $\mathbb{N}_0^{25}$ hat. Zeigen Sie, daß es auch ein Polynom $g \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_{26}]$ gibt, dessen positive Werte an Stellen $(x_1, \dots, x_{26}) \in \mathbb{N}_0^{25}$ genau die Primzahlen sind!

**Aufgabe 4:** *(7 Punkte)*

*a)* Zeigen Sie, daß das Polynom $x^3 + x + 1$ genau eine reelle Nullstelle $x_0$ hat!

*b)* Finden Sie ein Polynom, das $x_0 + \sqrt{5}$ und $x_0 - \sqrt{5}$ als seine einzigen reellen Nullstellen hat!

*c)* Finden Sie ein Intervall, in dem dieses Polynom nur $x_0 + \sqrt{5}$ als Nullstelle hat!

**Abgabe** bis zum Mittwoch, dem 21. März 2018, um 12.00 Uhr