WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

8. März 2018

4. Übungsblatt Reell-algebraische Geometrie

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*
Sei $f = X^2 + Y^2 + X - 3$ und $g = X^2 + XY - 2Y^2 - 5X + 5Y$.

a) Berechnen Sie $\mathrm{Res}_X(f, g)$ und $\mathrm{Res}_Y(f, g)$!
b) Beide Resultanten haben nur ganzzahlige Nullstellen. Bestimmen Sie diese!
c) Welche Lösungen hat das Gleichungssystem $f(x, y) = g(x, y) = 0$?

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*
Sei $f = X^2 + Y^2 - 4X - 6Y - 12$ und $g = X^2 + 3Y^2 + 4X - 18Y + 22$.

a) Beschreiben Sie die Nullstellenmengen von f und von g geometrisch!
b) Berechnen Sie $\mathrm{Res}_X(f, g)$!
c) Ersetzen Sie Y durch eine neue Variable U mit $Y = U + c$ derart, daß das Resultantenpolynom keinen U^3-Term enthält und bestimmen Sie die Nullstellen dieses Polynoms!
e) Welche Lösungen hat das Gleichungssystem $f(x, y) = g(x, y) = 0$?

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*
Versuchen Sie, mit Hilfe des Satzes von VIÈTE die Nullstellen der folgenden Polynome zu finden:

a) $f = X^5 - 2X^4 - 11X^3 + 40X^2 - 44X + 16$
b) $g = X^5 + 2X^4 - 4X^3 - 8X^2 + 3X + 6$

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Ist $\sqrt{3}$ Nullstelle eines Polynoms $f \in \mathbb{Q}[X]$, so auch $-\sqrt{3}$.
b) Zeigen Sie: Ist $u + v\sqrt{3}$ mit $u, v \in \mathbb{Z}$ Nullstelle eines Polynoms $f \in \mathbb{Q}[X]$, so ist auch $f\big(u - v\sqrt{3}\big) = 0$.
c) Zeigen Sie, daß $u + v\sqrt{3}$ und $u - v\sqrt{3}$ die gleiche Vielfachheit haben!
d) Falls $u+v\sqrt{3}$ eine r-fache Nullstelle von f ist, ist f in $\mathbb{Q}[X]$ teilbar durch $X^2-2uX+u^2-3v^2$.

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 14. März 2018, um 12.00 Uhr