WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

26. Februar 2018

2. Übungsblatt Reell-algebraische Geometrie

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

$(f_0, \dots, f_s)$ sei eine STURMsche Folge für das Polynom $f \in \mathbb{R}[x]$.

a) $h \in \mathbb{R}[X]$ sei ein Polynom und $g_i = h \cdot f_i$ für $i = 0, \dots, s$. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Anzahl der Variationen in der Folge $\bigl(f_0(x), \dots, f_s(x)\bigr)$ gleich der in der Folge $\bigl(g_0(x), \dots, g_s(x)\bigr)$?

b) $f, g, h \in \mathbb{R}[X]$ seien drei Polynome, und $r_0, \dots, r_m$ sei die Folge der beim EUKLIDischen Algorithmus für f und g auftretenden Divisionsreste. Welche Divisionsreste treten auf beim EUKLIDischen Algorithmus für fh und gh ?

c) $f \in \mathbb{R}[X]$ sei ein quadratfreies Polynom, d.h. alle (komplexen) Nullstellen von f sind einfach. $g \in \mathbb{R}[X]$ sei ein Polynom, das die gleichen Nullstellen wie f hat, aber eventuell mit höherer Vielfachheit. Dann gibt es ein Polynom $h \in \mathbb{R}[X]$, so daß $g = f \cdot h$ ist, und falls $g(a)$ und $g(b)$ nicht verschwinden, ist die Nullstellenanzahl von g im Intervall (a, b) gleich der Differenz der Variationen der Folge $(hf_0, \dots, hf_s)$ an den Punkten a und b.

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*

Wir betrachten das Polynom $f = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 8$. Zeigen Sie:

a) Für $x \leq -3$ ist $f'(x) < 0$; für $x \geq 2$ ist $f'(x) > 0$.

b) Alle reellen Nullstellen von f liegen im Intervall $(-3, 2)$.

c) Wie viele reelle Nullstellen gibt es?

d) Bestimmen Sie für jede reelle Nullstelle x von f ein Intervall, das diese und keine andere Nullstelle von f enthält!

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie alle Werte $p \in \mathbb{R}$, für die das Polynom $g = x^4 + x + p$ keine, eine, zwei, drei *bzw.* vier reelle Nullstellen hat!

b) Was wissen Sie über die Vorzeichen der Nullstellen?

c) Kann g mehrfache Nullstellen haben?

Abgabe bis zum Freitag, dem 2. März 2018, um 12.00 Uhr