Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

17. Februar 2018

1. Übungsblatt Reell-algebraische Geometrie

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

a) Zeigen Sie durch Betrachtung der Ableitung, daß die Abbildung

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \\ \qquad x \mapsto \dfrac{a + bx}{1 + x} \end{cases}$$

für zwei reelle Zahlen $a < b$ die positiven reellen Zahlen bijektiv abbildet auf das offene Intervall (a, b)!

b) Zeigen Sie dies auch ohne Benutzung der Ableitung!

c) Was ist das Bild von φ?

d) Zeigen Sie: Für ein Polynom $f \in \mathbb{R}[x]$ vom Grad d ist auch $g(x) = (1 + x)^d f\big(\varphi(x)\big)$ ein Polynom. Was können Sie über den Grad von g sagen?

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*

a) Zeigen Sie durch geeignete Anwendung der Regel von Descartes, daß das Polynom

$$f = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 6x - 1$$

in der Menge aller reeller Zahlen größer eins entweder eine oder drei Nullstellen hat!

b) Was sagt die Regel von Fourier-Budan über diese Nullstellenanzahl?

c) Was sagt sie über die Nullstellem im Intervall $(-1, 1)$?

d) Welche Schwierigkeiten gibt es bei der Anwendung auf das Intervall $(0, 1)$, und wie lassen sich diese umgehen?

Aufgabe 3: *(7 Punkte)*

a) Was sagt Ihnen die Regel von Descartes über die positiven und die negativen Nullstellen des Polynoms $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 2$?

b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Tricks von Jacobi die Nullstellenanzahl von f im Intervall $(1, 2)$!

c) Was wissen Sie jetzt über die Anzahlen der positiven und negativen Nullstellen von f?

d) Bestimmen Sie mit Hilfe der Regel von Budan-Fourier die Intervalle $(n, n + 1)$ mit $n \in \mathbb{Z}$, in denen f eine Nullstelle hat!

Abgabe bis zum Freitag, dem 22. Februar 2018, um 12.00 Uhr