WOLFGANG K. SEILER
*Tel.* 2515

A5, C201

*29. April 2015*

## 9. Übungsblatt Reell-algebraische Geometrie

**Aufgabe 1:** *(6 Punkte)*

*a)* $f: X \to Y$ sei eine bijektive semialgebraische Abbildung von $X \subseteq \mathbb{R}^n$ auf $Y \subseteq \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie, daß dann auch die Umkehrabbildung $f^{-1}: Y \to X$ semialgebraisch ist.

*b)* Zeigen Sie: Sind $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ semialgebraische Abbildungen zwischen den semialgebraischen Mengen $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ und $Z \subseteq \mathbb{R}^p$, so ist auch die Hintereinanderausführung $g \circ f: X \to Z$ semialgebraisch.
*Hinweis: Wenden Sie den Satz von* TARSKI-SEIDENBERG *an auf eine geeignete Teilmenge von $X \times Y \times Z$!*

**Aufgabe 2:** *(5 Punkte)*
$X \subseteq \mathbb{R}^n$ sei eine semialgebraische Menge. Zeigen Sie:

*a)* Sind $f, g: X \to \mathbb{R}$ semialgebraische Abbildungen, so auch $f + g$ und $f \cdot g$.

*b)* Mit dieser Addition und Multiplikation wird die Menge aller semialgebraischer Funktionen $X \to \mathbb{R}$ zu einem Ring.

*c)* Die Einheiten dieses Rings sind genau die Funktionen $f: X \to \mathbb{R}$ mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in X$.

**Aufgabe 3:** *(5 Punkte)*
$X \subseteq \mathbb{R}^n$ sei eine semialgebraische Menge und $\mathcal{I} = \{A_1, \dots, A_r\}$ sei eine Zerlegung von $\mathbb{R}^n$ gemäß erstem Struktursatz derart, daß $X$ die Vereinigung gewisser Mengen $A_k \in \mathcal{I}$ ist. Wir nennen zwei Mengen $A_k, A_\ell$ *benachbart,* wenn eine der beiden nichtleeren Durchschnitt mit dem Abschluß der anderen hat. Zeigen Sie: $X$ ist genau dann (weg-)zusammenhängend, wenn es zu je zwei Mengen $A_k, A_\ell \subseteq X$ eine Folge von Indizes $k_0 = k, k_1, \dots, k_m = \ell$ gibt, so daß $A_{k_i}$ und $A_{k_{i+1}}$ fur jedes $i = 0, \dots, m-1$ benachbart sind!
*Hinweis:* Beachten Sie, daß jede Menge $A_k$ homöomorph zu einem Würfel ist.

**Aufgabe 4:** *(4 Punkte)*
Die Polynome $f = x^5y^3 - 3x^5y^2 + 3x^5y - x^5$ und

$$\begin{aligned} g = {}& x^4y^4 - 16x^4y^3 - 12x^3y^4 + 86x^4y^2 + 192x^3y^3 + 44x^2y^4 \\ & - 176x^4y - 1032x^3y^2 - 704x^2y^3 - 48xy^4 + 105x^4 + 2112x^3y + 3784x^2y^2 + 768xy^3 \\ & - 1260x^3 - 7744x^2y - 4128xy^2 + 4620x^2 + 8448xy - 5040x \end{aligned}$$

haben den ggT $xy - x$. (Das soll *nicht* nachgerechnet werden!)

*a)* Zeigen Sie, daß für jeden Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x_0, y_0) = 0$ auch $g(x_0, y_0)$ verschwindet!
*Hinweis:* Versuchen Sie zunächst, $f$ in einer einfacheren Form zu schreiben.

*b)* Finden Sie den kleinsten Exponenten $n$ derart, daß $f$ ein Teiler von $g^n$ ist!

**Abgabe** bis zum Dienstag, dem 5. Mai 2015, um 15.30 Uhr