Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

15. April 2015

7. Übungsblatt Reell-algebraische Geometrie

Aufgabe 1: *(4 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Jede semialgebraische Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist eine endliche Vereinigung von (eventuell unendlichen) Intervallen und einpunktigen Mengen.

b) Ist umgekehrt auch jede endliche Vereinigung von Intervallen und einpunktigen Mengen semialgebraisch?

Aufgabe 2: *(6 Punkte)*

a) Berechnen Sie die Resultante sowie die sämtlichen Subresultanten der beiden Polynome $f = X^2 + pX + q$ und $g = X^2 - c$!

b) Begründen Sie, warum die Resultante genau dann verschwindet, wenn $f(\sqrt{c})$ oder $f(-\sqrt{c})$ verschwindet, und übersetzen Sie diese Bedingung in eine Polynomgleichung in den drei Variablen p, q und c !

c) Was können Sie über die Nullstellen von f sagen wenn die Subresultante $r_1(f, g)$ verschwindet?

d) Welche weiteren Informationen haben Sie, wenn zusätzlich auch noch $\mathrm{Res}_X(f, g)$ verschwindet?

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

Aus Aufgabe 3 des dritten Übungsblatts ist bekannt, daß die Diskriminante Δ des Polynoms $f = X^3 + pX + q$ gleich $4p^3 + 27q^2$ ist.

a) Berechnen Sie die erste Subresultante von f und f' !

b) Q_i sei die Menge alle $(p, q) \in \mathbb{R}^2$, für die i die höchste Vielfachheit einer Nullstelle von $X^3 + pX + q$ ist. Stellen Sie Q_1, Q_2 und Q_3 möglichst einfach als semialgebraische Mengen dar!

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*

Eine algebraische Varietät über einem Körper k ist eine Menge der Form

$$V = \left\{ x \in k^n \mid f_1(x) = \cdots = f_r(x) = 0 \right\}$$

für eine endliche Anzahl von Polynomen $f_1, \ldots, f_r \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Zeigen Sie:

a) Die Vereinigung zweier algebraischer Varietäten ist wieder eine algebraische Varietät.

b) Der Durchschnitt zweier algebraischer Varietäten ist wieder eine algebraische Varietät.

c) Für jeden Körper k gibt es Varietäten $V \subset k^n$ derart, daß

$$W = \left\{ (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in k^{n-1} \mid \exists x_n \in k \colon (x_1, \ldots, x_n) \in V \right\}$$

keine Varietät ist.

Abgabe bis zum Dienstag, dem 21. April 2015, um 15.30 Uhr