WOLFGANG K. SEILER
*Tel.* 2515

A5, C201

*24. Februar 2015*

# 2. Übungsblatt Reell-algebraische Geometrie

**Aufgabe 1:** *(8 Punkte)*

$(f_0, \dots, f_s)$ sei eine STURMsche Folge für das Polynom $f \in \mathbb{R}[x]$.

*a)* Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist auch $(af_0, \dots, af_s)$ eine STURMsche Folge für $f$?

*b)* $h \in \mathbb{R}[X]$ sei ein Polynom und $g_i = h \cdot f_i$ für $i = 1, \dots, s$. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Anzahl der Variationen in der Folge $\big(f_0(x), \dots, f_s(x)\big)$ gleich der in der Folge $\big(g_0(x), \dots, g_s(x)\big)$?

*c)* $f, g, h \in \mathbb{R}[X]$ seien drei Polynome, und $r_0, \dots, r_m$ sei die Folge der beim EUKLIDischen Algorithmus für $f$ und $g$ auftretenden Divisionsreste. Welche Divisionsreste treten auf beim EUKLIDischen Algorithmus für $fh$ und $gh$?

*d)* $h$ sei ein gemeinsamer Teiler des Polynoms $f \in \mathbb{R}[X]$ und seiner Ableitung. Vergleichen Sie die STURMschen Ketten von $f$ und $f/h$!

*e)* Konstruieren Sie daraus einen neuen Beweis des Satzes von STURM!

**Aufgabe 2:** *(7 Punkte)*

Wir betrachten das Polynom $f = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 8$. Zeigen Sie:

*a)* Für $x \le -3$ ist $f'(x) < 0$; für $x \ge 2$ ist $f'(x) > 0$.

*b)* Alle reellen Nullstellen von $f$ liegen im Intervall $(-3, 2)$.

*c)* Wie viele reelle Nullstellen gibt es?

*d)* Bestimmen Sie für jede positive Nullstelle $x$ von $f$ ein Intervall, das diese und keine andere Nullstelle von $f$ enthält!

**Aufgabe 3:** *(5 Punkte)*

*a)* Bestimmen Sie alle Werte $p \in \mathbb{R}$, für die das Polynom $g = x^4 + x + p$ keine, eine, zwei, drei *bzw.* vier reelle Nullstellen hat!

*b)* Kann $g$ mehrfache Nullstellen haben?

**Abgabe** bis zum Dienstag, dem 3. März 2015, um 15.30 Uhr