Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

17. Februar 2012

1. Übungsblatt Reell-algebraische Geometrie

Aufgabe 1: *(8 Punkte)*

a) Zeigen Sie durch Betrachtung der Ableitung, daß die Abbildung

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \\ \qquad x \mapsto \dfrac{a+bx}{1+x} \end{cases}$$

für zwei reelle Zahlen $a < b$ die positiven reellen Zahlen bijektiv abbildet auf das offene Intervall (a, b)!

b) Zeigen Sie dies auch ohne Benutzung der Ableitung!

c) Was ist das Bild von φ?

d) Zeigen Sie: Für ein Polynom $f \in \mathbb{R}[x]$ vom Grad d ist auch $g(x) = (1+x)^d f\big(\varphi(x)\big)$ ein Polynom. Was können Sie über den Grad von g sagen?

Aufgabe 2: *(2 Punkte)*

Leiten Sie aus der Regel von Descartes ein Aussage über die Nullstellen $x > a$ eines Polynoms $f \in \mathbb{R}[x]$ für eine gegebene reelle Zahl a ab!

Aufgabe 3: *(3 Punkte)*

$f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ sei mindestens m-mal stetig differenzierbar und habe im Punkt $x_0 \in (a, b)$ eine m-fache Nullstelle. Zeigen Sie: Falls m gerade ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß $f(x)$ in den beiden Intervallen $(x_0 - \varepsilon . x_0)$ und $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ dasselbe (konstante) Vorzeichen hat; für ungerade m gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß $f(x)$ in den beiden Intervallen $(x_0 - \varepsilon . x_0)$ und $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ verschiedene (jeweils konstante) Vorzeichen hat.

Aufgabe 4: *(7 Punkte)*

a) Was sagt Ihnen die Regel von Descartes über die positiven und die negativen Nullstellen des Polynoms $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 2$?

b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Tricks von Jacobi die Nullstellenanzahl von f im Intervall $(1, 2)$!

c) Was wissen Sie jetzt über die Anzahlen der positiven und negativen Nullstellen von f?

d) Bestimmen Sie mit Hilfe der Regel von Budan-Fourier die Intervalle $(n, n+1)$ mit $n \in \mathbb{Z}$, in denen f eine Nullstelle hat!

Abgabe bis zum Freitag, dem 24. Februar 2012, um 12.00 Uhr