Wolfgang K. Seiler A5, C201
Tel. 2515

20. November 2015

9. Übungsblatt Mathematische Visualisierung

Aufgabe 1: *(7 Punkte)*

a) k sei ein Körper, V ein dreidimensionaler k-Vektorraum und $\mathbb{P}$ die Menge aller eindimensionaler Untervektorräume von V. Zu jedem zweidimensionalen Untervektorraum $U < V$ bezeichnen wir die Menge aller eindimensionaler Untervektorräume von U als eine Gerade. Zeigen Sie, daß $\mathbb{P}$ so alle Axiome einer projektiven Ebene erfüllt!

b) $V^* = \operatorname{Hom}(V, k)$ sei der duale Vektorraum zu V. Zeigen Sie, daß die duale projektive Ebene $\mathbb{P}^*$ in natürlicher Weise mit $\mathbb{P}(V^*)$ identifiziert werden kann!

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

$\mathbb{A}$ sei eine affine Ebene. Zeigen Sie:

a) Sind die Geraden g und h parallel und ist ℓ parallel zu h, so ist g auch parallel zu ℓ.

b) Jede Gerade enthält mindestens zwei Punkte.

c) $\mathbb{A}$ enthält mindestens vier Punkte.

d) Finden Sie eine affine Ebene mit vier Punkten!

Aufgabe 3: *(8 Punkte)*

P sei eine projektive Ebene und g eine Gerade von $\mathbb{P}$.

a) Zeigen Sie: Sind g, h zwei Geraden von $\mathbb{P}$, so ist entweder $g = h$ oder $g \cap h$ besteht aus genau einem Punkt.

b) Zeigen Sie: Durch jeden Punkt $P \in \mathbb{P}$ gehen mindestens drei Geraden.

c) Eine Teilmenge h von $\mathbb{A} = \mathbb{R} \setminus g$ werde als Gerade bezeichnet, wenn es eine Gerade $h' \neq g$ von $\mathbb{P}$ gibt, so daß $h = h' \cap \mathbb{A}$ ist. Zeigen Sie, daß $\mathbb{A}$ so zu einer affinen Ebenen wird.

d) Zeigen Sie: Eine projektive Ebene enthält mindestens sieben Punkte und mindestens sieben Geraden.

e) Finden Sie eine projektive Ebene mit genau sieben Punkten und sieben Geraden!

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 26. November 2015, um 15.30 Uhr