Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

5. Oktober 2015

3. Übungsblatt Mathematische Visualisierung

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die Niveaulinien der Funktion

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \setminus K \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \dfrac{x^2-y^2}{1-x^2-y^2} \end{cases},$$

wobei K den Kreis mit Radius eins um den Nullpunkt bezeichnet! Für welche Funktionswerte erhalten Sie Ellipsen, und welche Kurven erhalten Sie sonst?

b) Die Niveaulinien der stetigen Funktion $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ seien allesamt entweder einzelne Punkte oder zusammenhängende doppelpunktfreie Kurven. Nach dem Jordanschen Kurvensatz besteht das Komplement einer solchen Kurve aus zwei zusammenhängenden Gebieten, von denen eines beschränkt ist. Zeigen Sie, daß f genau ein Extremum hat!

Aufgabe 2: *(10 Punkte)*

a) Bestimmen Sie den Parameter a so, daß der Punkt $(5,0)$ auf der durch

$$\mathcal{L} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x^2+y^2)^2 = a(x^2-y^2)\right\}$$

gegebenen Kurve liegt!

b) Bestimmen Sie die maximalen x- und y-Werte, die ein Punkt auf dieser Kurve haben kann!

c) Zeichnen Sie die Kurve nach dem *marching squares* Algorithmus, indem Sie die Funktion nur für ganzzahlige Koordinatenwerte berechnen!

d) Ändert sich das Bild, wenn Sie einmal unterscheiden zwischen den beiden Fällen

$$(x^2+y^2)^2 > a(x^2-y^2) \quad \text{und} \quad (x^2+y^2)^2 \le a(x^2-y^2)$$

und im zweiten Durchgang zwischen den Fällen

$$(x^2+y^2)^2 \ge a(x^2-y^2) \quad \text{und} \quad (x^2+y^2)^2 < a(x^2-y^2)\,?$$

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*

Beim *marching squares* Algorithmus sei der Funktionswert an zwei gegenüberliegenden Ecken eines Quadrats positiv, an den übrigen negativ.

a) Welche Linien zeichnet der Algorithmus?

b) Nun werde das Quadrat unterteilt in zwei Dreiecke und *marching triangles* wird angewandt. Was wird nun gezeichnet?

c) Wie sieht es aus, wenn das Quadrat durch seine beiden Diagonalen in vier Dreiecke unterteilt wird?

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 8. Oktober 2015, um 15.30 Uhr