Wolfgang K. Seiler A5, C201
Tel. 2515

1. März 2012

2. Übungsblatt Mathematische Visualisierung

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

a) In $\mathbb{R}^2$ sei φ die Drehung um den Nullpunkt mit Drehwinkel 30° (im Bogenmaß $\frac{\pi}{6}$), und ψ sei die Verschiebung um den Vektor $\binom{2}{3}$. Geben Sie φ, ψ sowie die beiden Hintereinanderausführungen $\varphi \circ \psi$ und $\psi \circ \varphi$ explizit in Koordinaten an!

b) Nun sei φ die Drehung um einen beliebigen Winkel α und ψ die um einen Winkel β; Drehpunkt sei weiterhin für beide Abbildungen der Nullpunkt. Berechnen Sie $\varphi \circ \psi$ auf zwei Arten und leiten Sie so Additionsformeln für Sinus und Kosinus her!

Aufgabe 2: *(6 Punkte)*

a) Die Drehung um den Punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ mit Winkel α läßt sich auch realisieren, indem man zunächst um den Vektor $\binom{-a}{-b}$ verschiebt, dann um den Nullpunkt dreht und danach um $\binom{a}{b}$ verschiebt. Leiten Sie daraus die Koordinatendarstellung dieser Drehung ab!

b) Setzen Sie diese Bewegung fort zu einer projektiven Abbildung $\mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$, und bestimmen Sie deren Abbildungsmatrix!

c) Bildet diese projektive Abbildung die unendlich ferne Ebene auf sich selbst ab?

Aufgabe 3: *(8 Punkte)*

g und h seien zwei Geraden im dreidimensionalen projektiven Raum $\mathbb{P}(V)$, die sich nicht schneiden, und P, Q seien zwei Punkte, von denen keiner auf g oder h liegt.

a) Zeigen Sie: Es gibt Punkte $P_1, P_2 \in g$ und $P_3, P_4 \in h$ derart, daß sowohl P_1, P_2, P_3, P_4, P als auch P_1, P_2, P_3, P_4, Q projektive Koordinatensysteme von $\mathbb{P}(V)$ bilden!

Zeigen Sie weiter, daß es jeweils genau eine projektive Abbildung $\mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ gibt mit den folgenden Eigenschaften:

b) g und h werden auf sich selbst abgebildet und P auf Q.

c) g wird auf h abgebildet, h auf g und P auf Q

d) g und h werden auf sich selbst abgebildet; P und Q bleiben fest.

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 8. März 2012, um 15.30 Uhr