Kapitel 2
Visualisierung skalarer Daten

Eines der bekanntesten Beispiele einer mathematischen Visualisierung sind die aus der Schulmathematik vertrauten Funktionsgraphen. Wenn wir sie digital erzeugen wollen, müssen wir freilich beachten, daß unsere Ausgabegeräte pixelorientiert sind, also nur eine endliche Menge von gitterförmig angeordneten Punkten darstellen können, deren Positionen fest vorgegeben sind. Für jeden dieser Punkte können wir einen Grau- oder Farbwert festlegen, und darin muß alle Information, die wir darstellen wollen, kodiert sein. Da die Computergraphik vorzugsweise mit Polygonen arbeitet, sollten wir aus Effizienzgründen die zu erstellende Zeichnung möglichst aus Polygonen zusammensetzen, und da wir die gleiche Graphik auf verschiedenen Ausgabegeräten betrachten wollen, sollten wir uns idealerweise nicht um die genaue Pixelstruktur kümmern müssen.

§1: Funktionen einer Veränderlichen

Wollen wir eine Funktion $f\colon [a,\, b] \to \mathbb{R}$ durch ihren Graphen

$$\Gamma_f \underset{\text{def}}{=} \left\{ (x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} \;\middle|\; y = f(x) \right\}$$

darstellen, haben wir als erstes das Problem, daß zwar unser Definitionsbereich $[a,\, b]$ beschränkt ist, nicht aber notwendigerweise auch dessen Bild in $\mathbb{R}$. Die Fläche, die uns für die Darstellung von Γ_f zur Verfügung steht, ist aber ein Rechteck oder, wenn wir Teile davon für andere Zwecke benötigen, eine Teilmenge davon. Wir müssen also den Wertebereich einschränken auf ein beschränktes Intervall $[c,\, d]$. Dazu haben wir im wesentlichen zwei Möglichkeiten:

1. *Clipping:* Wir wählen geeignete Zahlen c, d und schneiden den Graphen unterhalb c und oberhalb d einfach ab. Das empfiehlt sich insbesondere dann, wenn die Funktion im Intervall $[a, b]$ Polstellen hat, wie beispielsweise die Tangensfunktion bei den halbzahligen Vielfachen von π.
2. *Verwendung nichtlinearer Skalen:* An Stelle der Funktion f stellen wir ihre Schachtelung mit einer anderen Funktion dar, also beispielsweise die Funktion $\log f$. Diese Strategie empfiehlt sich insbesondere dann, wenn wir es mit Funktionen zu tun haben, bei denen es vor allem auf die *Größenordnung* der Werte ankommt.

Natürlich können die beiden Ansätze auch miteinander kombiniert werden, und für Funktionen, die auf ganz $\mathbb{R}$ oder großen Teilmengen davon definiert sind, läßt sich beides auch auf die unabhängige Variable anwenden.

Die Schachtelung mit anderen Funktionen läßt sich auch dazu verwenden, gewisse Klassen von Funktionen durch Geraden darzustellen: Verwendet man auf der x-Achse eine lineare Skala und auf der y-Achse eine logarithmische, werden etwa alle Graphen von Funktionen der Form $f(x) = ae^{bx}$ zu Geraden; bei logarithmischen Skalen auf beiden Achsen gilt dies für Funktionen der Form $y = ax^b$. Gebräuchlich sind auch Skalen, die beispielsweise die Summenverteilung der Normalverteilung zu einer Geraden machen.

Sobald wir es mit einer auf ein Rechteck beschränkten Kurve zu tun haben, besteht die übliche Strategie darin, sie an Hand einer endlichen Wertetabelle durch einen Streckenzug anzunähern. Die Anzahl und Lage der Stützstellen hängt dabei ab von den Genauigkeitsanforderungen und der Glattheit der darzustellenden Funktion.

Am Ende muß die Kurve natürlich als eine Menge von Pixeln dargestellt werden. Darum kümmert sich üblicherweise das Graphiksystem; daher wollen wir uns nur kurz mit der entsprechenden Methode beschäftigen. Meist wird ein Algorithmus verwendet, den JACK BRESENHAM 1962 für Geraden und Kreise aufgestellt hat; in ersterer Form läßt er sich sofort auf Streckenzüge anwenden.

BRESENHAMS Idee ist folgende: Ausgehend von einem festen Pixel, etwa der bestmöglichen Approximation des Punkts $\big(a, f(a)\big)$, betrachtet man die acht Nachbarpixel (zwei vertikale, zwei horizontale und vier diagonale) und entscheidet sich für dasjenige, das in der Fortschreitungsrichtung am nächsten an der Kurve liegt. Da die Steigung der Kurve bekannt ist, müssen dabei nicht alle acht, sondern nur zwei der Nachbarpixel wirklich untersucht werden. Außerdem kommt der Algorithmus aus mit ganzzahliger Arithmetik, arbeitet also sowohl in Software als auch auf Graphikkarten sehr effizient. Einzelheiten findet man in den meisten Lehrbüchern der Computergraphik sowie natürlich in BRESENHAMs Originalarbeit

J.E. BRESENHAM: Algorithm for computer control of a digital plotter, *IBM Systems Journal* **4** (1965), 25–30

JACK ELTON BRESENHAM wurde 1937 in Clovis, New Mexico. Er studierte zunächst Elektrotechnik an der University of New Mexico; nach seinem Bachelor-Abschluß 1959 wechselte er an die Stanford University, wo er 1964 promovierte. Schon vorher arbeitete auch bei IBMs, wo er bis 1987 blieb; dann wurde er Professor für Informatik an der Winthrop University in South Carolina.

§ 2: Graphen von Funktionen zweier Veränderlicher

a) Dreidimensionale Visualisierung

Grundsätzlich können wir natürlich für jede Funktion $f\colon K \to \mathbb{R}^m$ mit $K \subseteq \mathbb{R}^n$ den Graphen

$$\Gamma_f \underset{\text{def}}{=} \big\{(x, y) \in K \times \mathbb{R}^m \bigm| y = f(x)\big\}$$

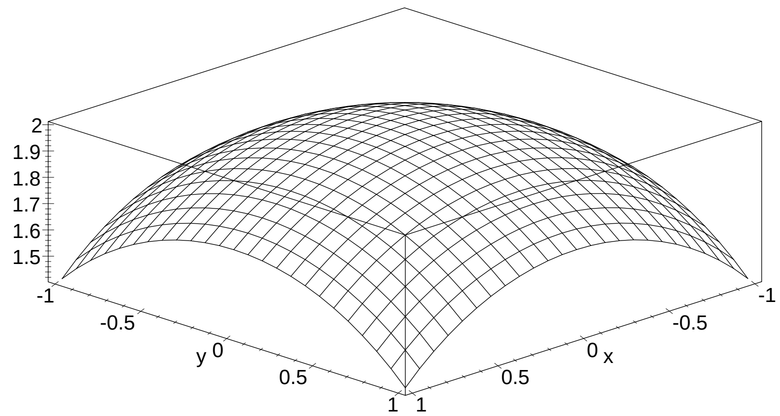
betrachten; da dieser in $\mathbb{R}^{n+m}$ liegt, ist er allerdings nur für $n + m \le 3$ wirklich anschaulich, und auch da müssen wir, eventuell mit den in §1 diskutierten Techniken, dafür sorgen, daß K eine beschränkte Menge ist.

Da er im dreidimensionalen Raum liegt, müssen wir uns zur Visualisierung auf eine Projektion in die Ebene beschränken, wobei es vor allem bei komplizierten Funktionen stark von der gewählten Perspektive abhängen kann, was man sieht. Zumindest am Bildschirm kann man dem Betrachter auch die Möglichkeit geben, den Graphen aus mehreren selbst gewählten Perspektiven zu betrachten und so einen besseren Eindruck zu bekommen. Für einfache reellwertige Funktionen zweier Veränderlicher dürfte der Graph die einfachste Methode der Veranschaulichung sein.

Beim hier abgebildeten Graphen der Funktionen

$$f\colon \begin{cases} [-1,1]\times[-1,1] & \to \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto \sqrt{4-x^2-y^2} \end{cases}$$

etwa sieht man recht gut, daß Γ_f Teil einer Kugeloberfläche ist.



Graph der Funktion $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$

Um Γ_f durch Polygone anzunähern, müssen wir wieder von einer endlichen Menge von Stützpunkten $(x,y)\in K$ ausgehen, dem sogenannten *Netz* oder *Gitter*. Am einfachsten sind regelmäßige Rechteckgitter: Wir legen zwei Schrittweiten $a,b>0$ fest und betrachten in $\mathbb{R}^2$ die Punkte der Form (na,mb) mit $n,m\in\mathbb{Z}$. Der Definitionsbereich K von f wird angenähert durch die Rechtecke mit Ecken $\big(na,mb\big)$, $\big((n{+}1)a,mb\big)$, $\big((n{+}1)a,(m{+}1)b\big)$ und $\big(na,(m{+}1)b\big)$. Dessen Eckpunkte können wir hochheben auf Γ_f, indem wir jeweils als dritte Koordinate den Funktionswert an der entsprechenden Stelle hinzufügen. Leider liegen aber die vier entstehenden Punkte im Allgemeinen nicht in einer Ebene, wir bekommen also kein ebenes Polyeder, wie wir es in der Computergraphik brauchen. Deshalb müssen wir bei mindestens einem der vier Punkte die Höhe verändern, um ein ebenes Viereck zu bekommen.

Dieses Problem haben wir nicht, wenn wir ein regelmäßiges Dreiecksgitter verwenden, denn drei Punkte liegen stets in einer Ebene. Ein solches

Gitter aus rechtwinkligen Dreiecken können wir aus einem Rechteckgitter konstruieren, indem wir jedes Rechteck durch eine seiner beiden Diagonalen in zwei Dreiecke zerlegen. Ein Gitter aus gleichseitigen Dreiecken mit Seitenlänge a ist beispielsweise das hexagonale Gitter mit den Eckpunkten

$$k \cdot (a, 0) + \ell \cdot (-\tfrac{a}{2}, \tfrac{a}{2}\sqrt{3}) = (ka - \tfrac{1}{2}\ell a, \tfrac{a}{2}\sqrt{3}\,\ell)$$

für $k, \ell \in \mathbb{Z}$.

Flexibler, aber auch umständlicher, sind irreguläre Gitter. Sie können dort, wo die Funktion wenig variiert, große Dreiecke oder Rechtecke vorsehen und in Regionen mit großer Variabilität kleinere.

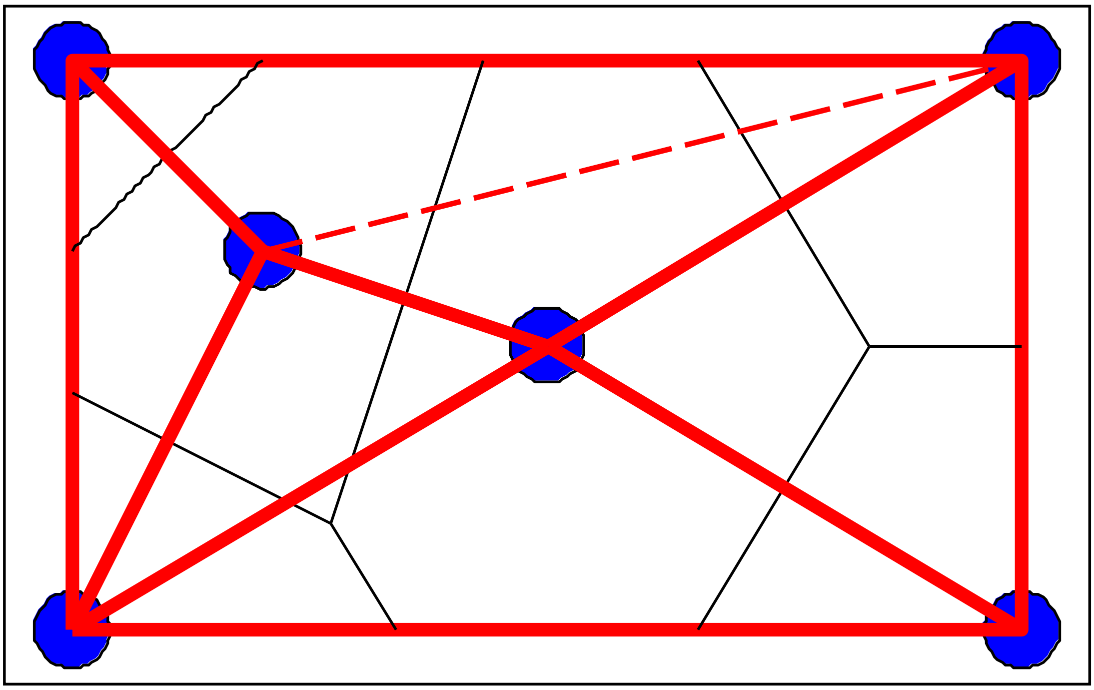
Bislang sind wir immer davon ausgegangen, daß die Funktion f durch einen mathematischen Ausdruck gegeben ist und einigermaßen „gute“ mathematische Eigenschaft hat. Bei empirischen Daten ist die Funktion aber oft nur in endlich vielen vorgegebenen Punkten gegeben: Wenn wir etwa die Temperaturen in Deutschland zu einem festen Zeitpunkt darstellen wollen, kennen wir deren Wert nur an endlich vielen Meßstationen. Hier suchen wir nach einem (endlichen) Dreiecksnetz, das genau diese Punkte als Ecken hat.

Ein populärer Algorithmus für eine solche Zerteilung ist die DELAUNAY-Triangulierung, benannt nach dem russischen Mathematiker Борис Николаевич Делоне (1890–1980).

Als erstes wird zu jedem der betrachteten Punkte P_i einschließlich der Ecken des Polygons die *Elementarzelle* konstruiert. Diese heißt auch *Wirkungsbereich,* VORONOI-*Bereich* oder WIGNER-SEITZ-*Zelle;* gemeint ist jeweils die Menge aller Punkte, deren Abstand zu P_i kleiner ist als der zu jedem anderen P_j.

Als nächstes verbindet man zwei Punkte P_i und P_j genau dann durch eine Strecke, wenn ihre Elementarzellen benachbart sind, deren Abschlüsse also eine Kante gemeinsam haben (die dann auf der Mittelsenkrechten der Verbindungsstrecke liegt.). Dies zerlegt das Polygon in kleinere Polygone, wobei nun alle P_i als Ecken auftreten.

Wenn die Punkte im Innern keine sehr spezielle Lage haben, werden die entstehenden Polygone Dreiecke sein; andernfalls muß man, falls



DELAUNAY-Triangulierung eines Rechtecks mit zwei inneren Punkten

man wirklich eine DELAUNAY-*Triangulierung* möchte, Polygone mit mehr als drei Ecken weiter zerlegen, indem man Verbindungsstrecken zwischen nicht benachbarten Kanten einzieht; in der Abbildung wäre das beispielsweise die gestrichelte Strecke.

b) Zweidimensionale Visualisierung des Graphen

Bei der Darstellung eines dreidimensionalen Graphen auf einem Bildschirm oder einem Stück Papier gibt es stets das Problem, daß je nach Projektion Teile des Graphen durch andere Teile verdeckt sind. Durch die Verwendung mehrerer Projektionen läßt sich dieses Problem zwar abmildern, aber nicht völlig beseitigen.

Eine rein zweidimensionale Darstellung erhalten wir, indem wir die Funktionswerte nicht durch eine räumliche Koordinate darstellen, sondern durch eine Farbskala (oder gegebenenfalls durch Symbole oder Texturen). Die Auflösung einer solchen Darstellung ist zwar geringer als die einer räumlichen Darstellung, dafür ist bei jedem Punkt sofort klar, wo sich der dortige Funktionswert bewegt.

Auch hier empfiehlt sich wieder, von einem geeigneten Gitter auszugehen und die Farbwerte für dessen Ecken zu berechnen; die Shader-Einheiten auf der Graphikkarte können diese Werte dann ins Innere der Rechtecke oder Dreiecke hinein interpolieren:

Ein Punkt im Inneren eines Rechtecks mit Ecken A, B, C, D läßt sich eindeutig darstellen in der Form

$$P = A + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} \quad \text{mit} \quad \lambda, \mu \in [0,\ 1]\,;$$

sind f_A, f_B, f_C, f_D die Farbwerte oder -vektoren in den vier Ecken, so geben wir dem Punkt P die Farbe zu

$$(1-\lambda)(1-\mu)f_A + \lambda/1-\mu)f_B + (1-\lambda)\mu f_C + \lambda\mu f_D\,,$$

völlig analog zur Formel für das PHONG *shading.* Im Innern eines Dreiecks mit Ecken A, B, C stellen wir die Dreieckspunkte in baryzentrischen Koordinaten dar als $P = \lambda A + \mu B - \nu C$ mit $\lambda, \mu, \nu \geq 0$ und $\lambda+\mu+\nu = 1$, und die Farbe in diesem Punkt wird durch $\lambda f_A+\mu f_B+\nu f_C$ bestimmt.

§3: Niveaulinien

Eine alternative Möglichkeit zur Veranschaulichung von Funktionen zweier Veränderlicher ist von topographischen Karten her bekannt: Dort wird die Höhe über dem Meeresspiegel, eine Funktion der beiden Ebenenkoordinaten, dargestellt durch *Höhenlinien.* Entsprechend können wir für eine beliebige Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und jeden Wert $c \in \mathbb{R}$ die *Niveaulinie*

$$N_c(f) \underset{\text{def}}{=} \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f(x,y) = c\right\}$$

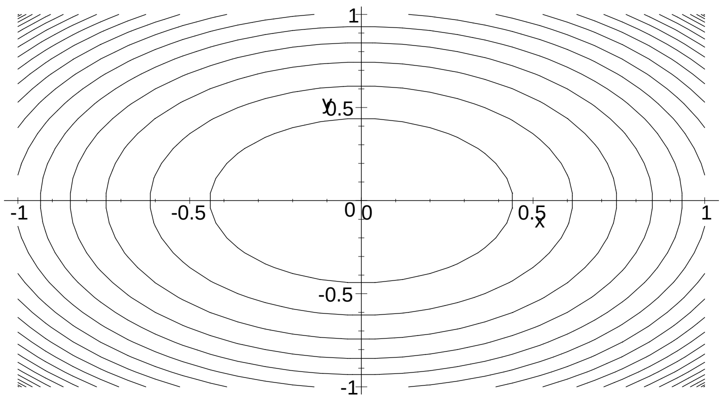
definieren; sie muß natürlich keine „Linie“ sein, sondern kann auch nur aus einigen Punkten bestehen, leer sein oder – im Falle einer konstanten Funktion – für einen Wert c aus dem gesamten Definitionsbereich D der Funktion bestehen.

Im Falle des obigen Beispiels etwa ist $N_c(f)$ für $c > 2$ und für $c < \sqrt{2}$ die leere Menge; für $c = 2$ besteht sie nur aus dem Nullpunkt, und für $c = \sqrt{2}$ aus den vier Punkten $(0, \pm 1)$ und $(\pm 1, 0)$. Für $\sqrt{2} < c < 2$

erhalten wir die in Abbildung 26 für $c = 1{,}5$ bis $c = 2$ in Schritten von 0,05 dargestellten Kreislinien

$$\sqrt{4 - x^2 - y^2} = c \quad \text{oder} \quad x^2 + y^2 = 4 - c^2\,,$$

eingeschränkt natürlich auf das Einheitsquadrat als dem Definitionsbereich von f.



Niveaulinien der Funktion $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

Für Funktionen von mehr als zwei Veränderlichen ist die Visualisierung naturgemäß schwieriger; wir können Graphen und Niveaulinien, -flächen *usw.* zwar problemlos definieren, aber nicht mehr zeichnen – es sei denn, es handelt sich um sehr einfache Niveauflächen im $\mathbb{R}^3$. Bei Funktionen in einem mehrdimensionalen Raum kommt hinzu, daß die Niveauflächen dann nicht mehr nur von einem, sondern von mehreren Parametern abhängen.

Die Konstruktion einer Niveaulinie oder -fläche ist äquivalent zur Konstruktion des Graphen einer implizit gegebenen Funktion. Üblicherweise werden dazu sogenannte *marching squares* beziehungsweise *marching cubes* verwendet.

Beginnen wir mit dem zweidimensionalen Fall; zu zeichnen sei die Kurve

$$\bigl\{(x, y) \in [x_1,\, x_2] \times [y_1,\, y_2] \bigm| f(x, y) = c\bigr\}$$

Dazu unterteilen wir das Rechteck $[x_1,\, x_2] \times [y_1,\, y_2]$ durch achsenparallele Geraden in eine geeignete Anzahl von Teilrechtecken und berechnen $f(x, y)$ für alle Eckpunkte dieser Rechtecke. Falls $f(x, y) > c$ ist, markieren wir die Ecke durch einen dicken Punkt, sonst nicht.

Wenn in einem Rechteck keine oder alle Ecken markiert sind, gehen wir davon aus, daß die Funktion auf dem gesamten Rechteck kleiner oder größer als c ist und die zu zeichnende Kurve das Rechteck nicht schneidet.

Wenn genau eine Ecke markiert ist, können wir davon ausgehen, daß die Kurve diese Ecke vom Rest des Rechtecks abschneidet; wir nähern sie an, indem wir die Mittelpunkte der beiden Kanten, die sich an dieser Ecke treffen, durch eine Strecke verbinden. Genauso verfahren wir im Falle von drei markierten Ecken mit der nichtmarkierten.

Sind zwei benachbarte Ecken markiert, geht die Kurve zwischen deren Kante und der gegenüberliegenden durchs Rechteck; wir nähern sie an durch die zur Kante parallelen Strecke durch den Mittelpunkt des Rechtecks.

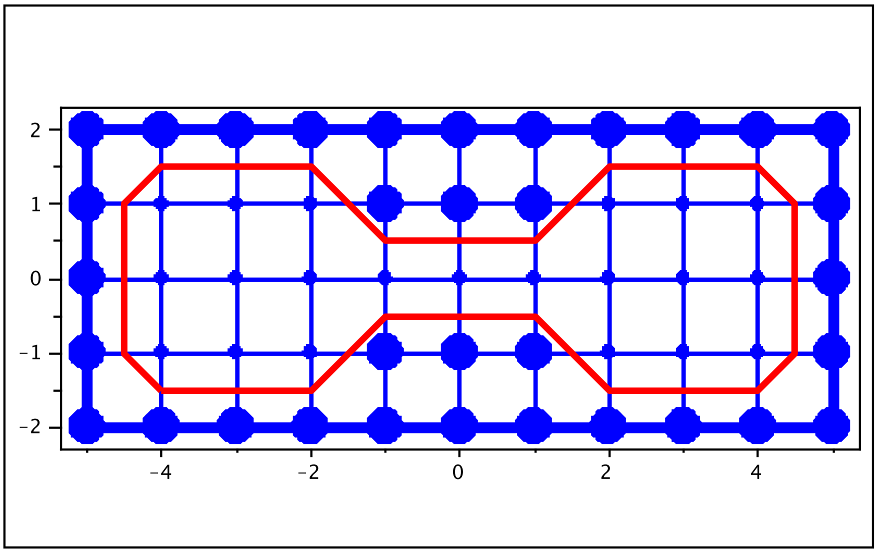
Sind schließlich zwei gegenüberliegende Ecken markiert, so ist die Situation nicht eindeutig: Wir können entweder die beiden markierten Ecken so abtrennen wie im Fall nur einer markierten Ecke, oder aber die beiden nichtmarkierten. Diese Entscheidung muß willkürlich getroffen werden (oder durch eine Verfeinerung des Gitters überflüssig gemacht werden).

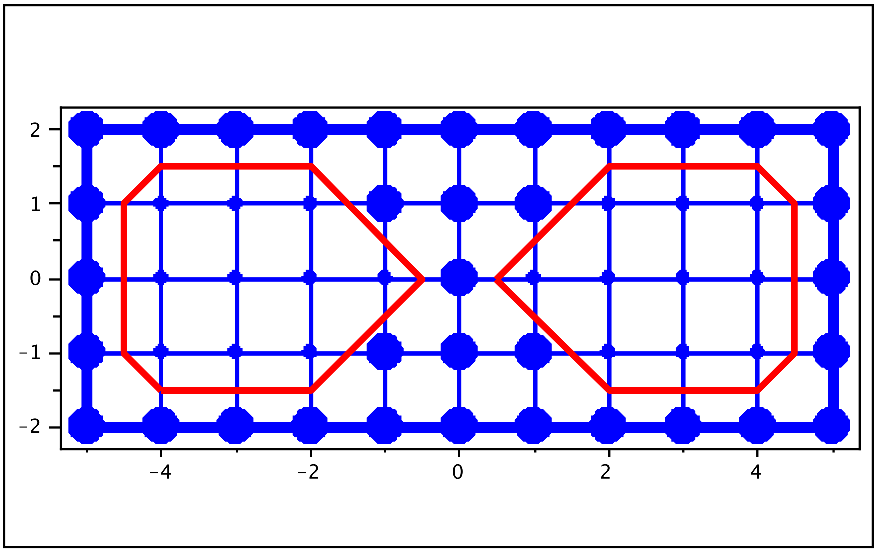
Eine weitere Willkür besteht darin, wie wir mit Eckpunkten verfahren, in denen $f(x, y) = s$ ist. Diese können wir entweder markieren oder nicht; das Ergebnis kann sich dadurch auch qualitativ verändern.

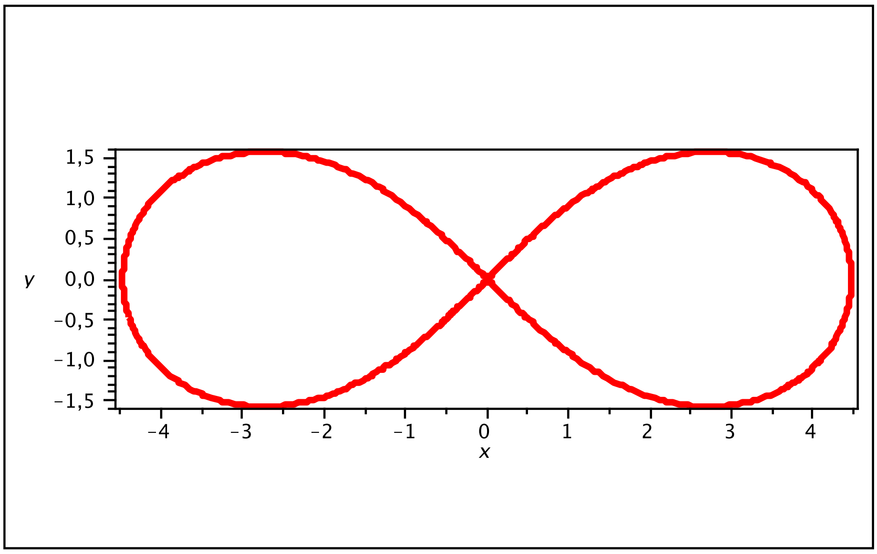
Die nächsten beiden Zeichnungen zeigen die Konstruktion der Lemniskate

$$\left\{(x, y) \in [-5,\ 5] \times [-2,\ 2] \;\middle|\; (x^2 + y^2)^2 - 20(x^2 - y^2) = 0\right\}$$

mit *marching squares*, wobei in der ersten Zeichnung nur Punkte mit $f(x, y) > 0$ markiert wurden, in der zweiten dagegen auch noch alle mit $f(x, y) = 0$. (Tatsächlich war das hier nur der Nullpunkt.) Beim ersten Ansatz erhalten wir eine zusammenhängende Kurve, beim zweiten nicht. Das dritte Bild zeigt die korrekte Kurve.


2
1
0
−1
−2
−4
−2
0
2
4


2
1
0
−1
−2
−4
−2
0
2
4


1,5
1,0
0,5
y
0,0
−0,5
−1,0
−1,5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
x

Für die Konstruktion implizit gegebener Flächen arbeitet man entsprechend mit *marching cubes*, d.h. der Ausgangsquader wird in Teilquader zerlegt, an deren Ecken werden die Funktionswerte berechnet, und je nach Anzahl und Lage der markierten Ecke werden geeignete Drei- oder Vierecke konstruiert: ...

Statt mit Rechtecken und Quadern könnte man auch mit Dreiecken und Tetraedern arbeiten; dies hätte den Vorteil, daß hier stets eindeutig klar ist, welche Strecke oder welches Dreieck einzuzeichnen ist. Einzelheiten seien dem Leser als Übung überlassen.