

31. März 2026

6. Übungsblatt Mathematik und Information

Aufgabe 1: (12 Punkte)

Sie wollen eine gewisse Geldsumme bei einer Bank anlegen, die Ihnen folgende Alternativen anbietet: Sie können einen Teil Ihres Geldes auf ein Konto einzahlen, wo es allerdings nicht verzinst wird, so daß dieser Betrag einfach konstant bleibt. Sie können aber auch einen Teil anlegen in eine Aktie, deren Kurs an jedem Börsentag mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ mit einer festen Steigerungsrate $\alpha > 1$ multipliziert wird; ebenfalls mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ wird der Kurs aber durch α dividiert. Sie sollen entscheiden, für welche Teile b_1, b_2 Sie jeweils die erste und die zweite Alternative anwenden.

- Wie sieht der Vektor $X = (X_1, X_2)$ der Zufallsvariablen für diesen „Markt“ aus, und mit welchem Faktor wird Ihr Kapital multipliziert, wenn sie das Portfolio (b_1, b_2) wählen?
- Bestimmen Sie die Wachstumsrate $W(b, F)$ eines beliebigen Portfolios!
- Für welches Portfolio wird die optimale Wachstumsrate W^* erreicht, und wie groß ist diese?
- Beschreiben Sie das asymptotische Verhalten der Wachstumsrate $S_n = \prod_{i=1}^n \langle b, X \rangle$ über n Börsentage für eine beliebige Anlagestrategie b !
- Ein Börsenguru bietet Ihnen als Zusatzinformation eine Zufallsvariable Y an, die den Wert 1 annimmt, wenn $X_1 \geq 1$ und $X_2 \geq 1$ ist; ansonsten liefert sie eine Null. Welche optimale Wachstumsrate W^{**} können Sie mit dieser Zusatzinformation erreichen?
- Überprüfen Sie, daß $W^{**} - W^* \leq I(X; Y)$ ist!

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Die Bank modifiziert ihr Angebot so, daß Sie für den fest angelegten Teil Ihres Geldes eine Verzinsung bekommen, die – auf Börsentage umgerechnet – einer Multiplikation mit einem Faktor $c > 1$ entspricht.

- Wie sehen das log-optimale Portfolio und die damit erzielbare Wachstumsrate nun aus?
- Ab welchem Wert von c setzt die log-optimale Anlagestrategie alles auf eine der beiden Alternativen?

Aufgabe 3: (4 Punkte)

An einer Börse, die bislang durch eine Zufallsvariable $X = (X_1, \dots, X_m)$ mit Werten in $\mathbb{R}_{\geq 0}^m$ und Verteilungsfunktion F beschrieben wurde, wird als neues Produkt ein Aktienfond angeboten. Dessen Manager wählt dazu ein Portfolio $b \in \mathbb{R}^m$ (mit den üblichen Nebenbedingungen) aus an der Börse gehandelten Aktien.

- Welche Zufallsvariablen und welche Verteilungsfunktion beschreiben die um das neue Papier erweiterte Börse?
- Zeigen Sie, daß sich an der optimalen Wachstumsrate durch die Neueinführung des Fonds nichts ändert!

Aufgabe 4: (8 Punkte)

Eine Anlage wächst jedes Jahr mit einer Wahrscheinlichkeit von 60% um zwei Prozent, mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% verliert sie ein Prozent an Wert.

- a) Welche Wachstumsrate hat diese Anlage?
- b) Welches maximale/minimale Wachstum ist in zehn Jahren möglich?
- c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Vermögen nach zehn Jahren kleiner ist als der Anlagebetrag?
- d) Nun wird nur ein Anteil $c \in [0, 1]$ des Vermögens investiert, der Rest wird zurückbehalten. Wie hängen die Antworten auf a) bis c) für die neue Anlagestrategie von c ab?

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 15. April 2026, um 15.30 Uhr