

1. März 2026

2. Übungsblatt Mathematik und Information

Aufgabe 1:

$\mathcal{X} = X_1, X_2, \dots$ sei eine stationäre zeitinvariante MARKOV-Kette mit Alphabet $A = \{a, b\}$ und Übergangsmatrix $A = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix}$ mit zwei Parametern $p, q \in [0, 1)$.

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen und Entropien der einzelnen Zufallsvariablen X_k !
- Bestimmen Sie die Entropierate dieses Prozesses!
- Wie muß man p und q wählen, damit diese Rate möglichst groß bzw. möglichst klein wird?

Aufgabe 2:

- X sei eine Zufallsvariable mit Werten im Alphabet A und $f: A \rightarrow B$ und sei eine Abbildung. Zeigen Sie, daß die Entropie der Zufallsvariable $f(X)$ höchstens gleich $H(X)$ sein kann! (Hinweis: Berechnen Sie die gemeinsame Entropie $H(X, f(X))$ mit Hilfe der Kettenregel auf zwei Arten!)
- Geben Sie ein Beispiel an, bei dem $H(f(X)) < H(X)$
- Zeigen Sie: Ist Y eine Zufallsvariable mit Werten in einem Alphabet B und ist $H(Y|X) = 0$, so gibt es eine Abbildung $f: A \rightarrow B$, so daß $Y = f(X)$ ist. Sie können dabei annehmen, daß sowohl X als auch Y jeden Wert aus ihrem Alphabet mit einer positiven Wahrscheinlichkeit produzieren.

Aufgabe 3:

$\mathcal{X} = X_1, X_2, \dots$ sei ein stochastischer Prozess mit Alphabet A , $f: A \rightarrow B$ sei eine Abbildung, und der stochastische Prozess $\mathcal{Y} = Y_1, Y_2, \dots$ sei definiert durch $Y_i = f(X_i)$. Zeigen Sie, daß für die Entropieraten der beiden Prozesse gilt: $H(\mathcal{Y}) \leq H(\mathcal{X})$

Aufgabe 4:

Jedes der folgenden Kryptogramme verschlüsselt ein deutsches Wort mit einer Caesar-Chiffre. Für welche Chiffretexte ist die Entschlüsselung eindeutig?

- a) xgas b) xql c) old d) ma e) qh

Aufgabe 5:

Ein BAYESScher Gegner versucht ein Kryptogramm zu entschlüsseln, das auf einer Permutation des Alphabets $\{A, B, \dots, Z\}$ basiert. Er kennt allerdings nur die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Buchstaben für deutschen Klartext und hat keine weitergehenden Informationen über Buchstabenpaare und Ähnliches. Wie wird er den Text entschlüsseln?

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 4. März 2026, um 15.30 Uhr