

19. Februar 2026

1. Übungsblatt Mathematik und Information

Aufgabe 1:

- a) Eine Nachrichtenquelle benutzt das Alphabet $A = \{a, b, c, d, e, f\}$; sie produziert in 50% aller Fälle den Buchstaben a , in 25% aller Fälle den Buchstaben b , und die restlichen vier Buchstaben mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Berechnen Sie ihre Entropie!
- b) Finden sie binäre Kodierungen für a, b, c, d, e, f derart, daß die Anzahl der Bits pro Buchstabe für längere Nachrichten minimal wird! Der Code soll so konstruiert sein, daß keine Zwischenräume zwischen den Bitfolgen für die einzelnen Zeichen notwendig sind.
- c) Was ändert sich in a) und b), wenn die sechs Buchstaben allesamt gleiche Wahrscheinlichkeit haben?

Aufgabe 2:

Wenn eine Nachrichtenquelle einen seltenen Buchstaben sendet, überrascht uns das mehr, als wenn sie einen häufigen sendet. Wir wollen dies quantifizieren durch eine Funktion $\ddot{U}: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, die den Überraschungseffekt $\ddot{U}(p)$ eines Buchstaben beschreibt, der mit Wahrscheinlichkeit p auftritt. Natürlich soll $\ddot{U}(p) > \ddot{U}(q)$ sein, falls $p < q$ ist; außerdem sollen die gesendeten Buchstaben unabhängig von ihren Vorgängern sein, so daß die Wahrscheinlichkeit eines Paares das Produkt der Wahrscheinlichkeiten der Komponenten ist und sich die Überraschungseffekte addieren: $\ddot{U}(pq) = \ddot{U}(p) + \ddot{U}(q)$. Zeigen Sie:

- a) Zu jeder solchen Funktion $\ddot{U}$ gibt es ein $a > 1$, so daß $\ddot{U}(p) = -\log_a p$ ist.
- b) Für $a = 2$ ist die Entropie der Quelle gleich dem Erwartungswert der Funktion $\ddot{U}$.

Aufgabe 3:

X und Y seien Zufallsvariablen mit Werten in $\{0, 1\}$; ihre gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung sei gegeben durch $p(0, 0) = \frac{1}{2}$, $p(0, 1) = p(1, 1) = \frac{1}{4}$ und $p(1, 0) = 0$.

- a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen p_X und p_Y der beiden Zufallsvariablen!
- b) Berechnen Sie $H(X)$, $H(Y)$, $H(X, Y)$, $H(X|Y)$, $H(Y|X)$ und $I(X; Y)$!
- c) Was sind die KULLBACK-LEIBLER-Distanzen $d(p_X || p_Y)$ und $d(p_Y || p_X)$?

Aufgabe 4:

- a) Ein fairer Würfel wird geworfen; die Zufallsvariable X mit Werten in $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ gibt an, welche Zahl oben liegt, Y sagt, welche unten liegt, und Z , welche nach vorne zeigt. Bestimmen Sie die wechselseitigen Informationen $I(X; Y)$, $I(X, Z)$ und $I(Z; Y)$!
- b) Was sind die bedingten wechselseitigen Informationen $I(X; Y|Z)$ und $I(X; Z|Y)$?
Hinweis: Die Summe gegenüberliegenden Seiten eines Würfels ist stets sieben.

Aufgabe 5:

$\mathcal{X} = X_1, X_2, \dots$ sei eine stationäre MARKOV-Kette mit Alphabet $A = \{a, b\}$ und Übergangsmatrix $A = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix}$.

- a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen und Entropien der einzelnen Zufallsvariablen X_k !
- b) Bestimmen Sie die Entropierate dieses Prozesses!
- c) Wie muß man p und q wählen, damit diese Rate möglichst groß bzw. möglichst klein wird?

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 25. Februar 2026, um 15.30 Uhr