

30. Mai 2016

11. Übungsblatt Mathematik und Information

Aufgabe 1: (8 Punkte)

- a) A sei eine Matrix mit n Zeilen und $m \leq n$ Spalten und $A = U\Sigma V^T$ sei eine Singulärwertzerlegung von A . Zeigen Sie, daß die ersten m Spalten von V eindeutig durch die Spalten von U bestimmt sind!
- b) Bestimmen Sie das Bild der Sphäre

$$S = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| = 1\}$$

unter der linearen Abbildung $\varphi: \begin{cases} \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \\ x \mapsto Ax \end{cases} !$

Aufgabe 2: (8 Punkte)

- a) Berechnen Sie die Singulärwertzerlegung von $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}!$
- b) Welche 2×3 -Matrix vom Rang 1 unterscheidet sich im Sinne der kleinsten Quadrate am wenigsten von A ?

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ habe den Rang r und die singulären Werte $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r$. Unter der L^2 -Norm $\|B\|_2$ einer Matrix $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ verstehen wir das Maximum der Längen der Vektoren Bx , wobei x die sämtlichen Vektoren der Länge eins durchläuft. Zeigen Sie: Ist $\|B\|_2 < \sigma_r$, so ist der Rang von $A + B$ mindestens gleich r .

Abgabe bis zum Freitag, dem 3. Juni 2016, um 11.55 Uhr