Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

15. April 2016

6. Übungsblatt Mathematik und Information

Aufgabe 1: *(10 Punkte)*
$X_1, X_2, \ldots$ sei eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen über einem Alphabet A. Für $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ sei $p(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{i=1}^n p(a_i)$, und für $n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ sei

$$A_\varepsilon^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \in A^n \mid 2^{-n(H+\varepsilon)} \le p(a_1, \ldots, a_n) \le 2^{-n(H-\varepsilon)}\},$$

wobei H die Entropie einer (und damit jeder) der Zufallsvariablen X_i bezeichnet.

a) Für alle $(a_1, \ldots, a_n) \in A_\varepsilon^n$ ist $\left|-\frac{1}{n}p(a_1, \ldots, a_n) - H\right| < \varepsilon$.

b) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N_0 \in \mathbb{N}$, so daß für $n \ge N_0$ ein Element von A^n mit Wahrscheinlichkeit größer $1 - \varepsilon$ in A_ε^n liegt.
Hinweis: Wenden Sie das Gesetz der großen Zahlen an auf die Folge der Zufallsvariablen $Y_i = -\log_2 p(X_i)$.

c) Für hinreichend große n ist $(1-\varepsilon)2^{n(H+\varepsilon)} \le \#A_\varepsilon^n \le 2^{n(H+\varepsilon)}$.

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*
Das Alphabet $A = \{a, b\}$ enthalte zwei Elemente, und $X_1, X_2, \ldots$ sei eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen, die a mit Wahrscheinlichkeit $2/3$ und b mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ annehmen. Bestimmen Sie für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und $\varepsilon = \frac{1}{4}$, wieviel Prozent der Elemente von A^{10} in A_ε^{10} liegen!

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*
Eine Quelle produziert Folgen von Nullen und Einsen, wobei die Eins nur eine Wahrscheinlichkeit von $1/200$ hat.

a) Berechnen Sie die Entropie dieser Quelle?

b) Die von der Quelle produzierten Bit werden in Blöcken von je hundert Zeichen übertragen. Dazu wird jeder Folge von hundert Nullen und Einsen, die höchstens drei Einsen enthält, ein Codewort zugeordnet. Alle diese Codewörter haben dieselbe Länge. Wie viele Bit müssen das mindestens sein?

Abgabe bis zum Freitag, dem 22. April 2016, um 11.55 Uhr