

22. November 2012

## 11. Übungsblatt Mathematik und Information

### Aufgabe 1: (8 Punkte)

- a)  $A$  sei eine Matrix mit  $n$  Zeilen und  $m \leq n$  Spalten und  $A = U\Sigma V^T$  sei eine Singulärwertzerlegung von  $A$ . Zeigen Sie, daß die ersten  $m$  Spalten von  $V$  eindeutig durch die Spalten von  $U$  bestimmt sind!
- b) Bestimmen Sie das Bild der Sphäre

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$$

unter der linearen Abbildung  $\varphi: \begin{cases} \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \\ x \mapsto Ax \end{cases} !$

### Aufgabe 2: (8 Punkte)

- a) Berechnen Sie die Singulärwertzerlegung von  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}!$
- b) Welche  $2 \times 3$ -Matrix vom Rang 1 unterscheidet sich im Sinne der kleinsten Quadrate am wenigsten von  $A$ ?

### Aufgabe 3: (4 Punkte)

Die Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  habe den Rang  $r$  und die singulären Werte  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r$ . Unter der  $L^2$ -Norm  $\|B\|_2$  einer Matrix  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  verstehen wir das Maximum der Längen der Vektoren  $Bx$ , wobei  $x$  die sämtlichen Vektoren der Länge eins durchläuft. Zeigen Sie: Ist  $\|B\|_2 < \sigma_r$ , so ist der Rang von  $A + B$  mindestens gleich  $r$ .

Abgabe bis zum Freitag, dem 29. November 2012, um 12.00 Uhr