WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

27. September 2012

4. Übungsblatt Mathematik und Information

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

a) Die MARKOV-Kette $X_1, X_2, \dots$ habe die Übergangsmatrix A und $\nu = \big(p(1), \dots, p(n)\big)$ sei der Vektor der Wahrscheinlichkeiten, mit denen X_1 die Elemente des gemeinsamen Alphabets $\{1, 2, \dots, n\}$ annimmt. Finden Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an A und V, die die Stationarität der MARKOV-Kette garantiert!

b) Die deutsche Sprache werde durch eine MARKOV-Kette modelliert. Die Wahrscheinlichkeiten der 26 Buchstaben des Alphabets seien $p_1, \dots, p_{26}$, und die Wahrscheinlichkeit, daß nach dem i-ten Buchstaben der j-te steht, sei p_{ij}. Welche Beziehung gilt dann zwischen den p_i und den p_{ij}?

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*

$\mathcal{X} = X_1, X_2, \dots$ sei eine stationäre MARKOV-Kette mit Alphabet $A = \{a, b\}$ und Übergangsmatrix $A = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen und Entropien der einzelnen Zufallsvariablen X_n !

b) Bestimmen Sie die Entropierate dieses Prozesses!

c) Wie muß man p und q wählen, damit diese Rate möglichst groß *bzw.* möglichst klein wird?

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*

$\mathcal{X} = X_1, X_2, \dots$ sei ein stochastischer Prozess mit Alphabet A, $f\colon A \to B$ sei eine Abbildung, und der stochastische Prozess $\mathcal{Y} = Y_1, Y_2, \dots$ sei definiert durch $Y_i = f(X_i)$. Zeigen Sie, daß für die Entropieraten der beiden Prozesse gilt: $H(\mathcal{Y}) \le H(\mathcal{X})$

Aufgabe 4: *(2 Punkte)*

Bei einer Permutationschiffre wird der Klartext in Blöcke aus n-Buchstaben zerteilt, und auf jeden dieser Blöcke wird eine feste Permutation aus der Gruppe aller Permutationen einer n-elementigen Menge angewahndt. Wie kann ein BAYESscher Gegner, der nur die Buchstabenhäufigkeiten der Sprache kennt, einen so verschlüsselten Text dechiffrieren?

Abgabe bis zum Freitag, dem 4. Oktober 2012, um 12.00 Uhr