

20. September 2012

### 3. Übungsblatt Mathematik und Information

#### Aufgabe 1: (6 Punkte)

$X_1, X_2, \dots$  sei eine MARKOV-Kette von Zufallsvariablen mit Werten in der Menge  $\{1, 2, 3\}$ . Die Variable  $X_1$  nehme die drei Werte an mit den Wahrscheinlichkeiten  $p_1 = \frac{1}{2}$  und

$p_2 = p_3 = \frac{1}{4}$ ; die Übergangsmatrix sei  $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix}$

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der von  $(X_1, X_2)$  produzierten Wertepaare!
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit produziert  $(X_1, \dots, X_5)$  eine Folge von fünf Einsen?
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $X_2$ !
- Ist diese MARKOV-Kette ein stationärer stochastischer Prozess?

#### Aufgabe 2: (5 Punkte)

$X$  und  $Y$  seien Zufallsvariablen mit Werten in  $\{0, 1\}$ ; ihre gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung sei gegeben durch  $p(0, 0) = \frac{1}{2}$ ,  $p(0, 1) = p(1, 1) = \frac{1}{4}$  und  $p(1, 0) = 0$ .

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen  $p_X$  und  $p_Y$  der beiden Zufallsvariablen!
- Berechnen Sie  $H(X)$ ,  $H(Y)$ ,  $H(X, Y)$ ,  $H(X|Y)$ ,  $H(Y|X)$  und  $I(X; Y)$ !
- Was sind die KULLBACK-LEIBLER-Distanzen  $d(p_X \| p_Y)$  und  $d(p_Y \| p_X)$ ?

#### Aufgabe 3: (4 Punkte)

- Ein fairer Würfel wird geworfen; die Zufallsvariable  $X$  mit Werten in  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  gibt an, welche Zahl oben liegt,  $Y$  sagt, welche unten liegt, und  $Z$ , welche nach vorne zeigt. Bestimmen Sie die wechselseitigen Informationen  $I(X; Y)$ ,  $I(X; Z)$  und  $I(Z; Y)$ !
- Was sind die bedingten wechselseitigen Informationen  $I(X; Y|Z)$  und  $I(X; Z|Y)$ ?  
*Hinweis: Die Zahlen auf gegenüberliegenden Seiten eines Würfels ergänzen sich stets zu sieben.*

#### Aufgabe 4: (5 Punkte)

- $X$  sei eine Zufallsvariable mit Werten im Alphabet  $A$  und  $f: A \rightarrow B$  und sei eine Abbildung. Zeigen Sie, daß die Entropie der Zufallsvariable  $f(X)$  höchstens gleich  $H(X)$  sein kann! (*Hinweis: Berechnen Sie die gemeinsame Entropie  $H(X, f(X))$  mit Hilfe der Kettenregel auf zwei Arten!*)
- Geben Sie ein Beispiel an, bei dem  $H(f(X)) < H(X)$  ist!
- Zeigen Sie: Ist  $Y$  eine Zufallsvariable mit Werten in einem Alphabet  $B$  und ist  $H(Y|X) = 0$ , so gibt es eine Abbildung  $f: A \rightarrow B$ , so daß  $Y = f(X)$  ist. Sie können dabei annehmen, daß sowohl  $X$  als auch  $Y$  jeden Wert aus ihrem Alphabet mit einer positiven Wahrscheinlichkeit produzieren.

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 27. September 2012, um 15.30 Uhr