Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

20. Mai 2011

12. Übungsblatt Mathematik und Information

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

Die Zufallsvariable X nehme als Werte mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit die Zahlen $\pm 5, \pm 3$ und ± 1 an; eine weitere Zufallsvariable Y sei definiert als $Y = X^2$.

a) Welche Entropien haben X und Y?

b) Wie könnte man die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X so verändern, daß sich die Entropie von X halbiert?

c) Was ist die Kullback-Leibler-Distanz zwischen den beiden Wahrscheinlichkeitsverteilungen?

d) Erläutern Sie den Begriff der *bedingten Entropie* und berechnen Sie diese am Beispiel von X unter der Voraussetzung, daß Y bekannt ist!

e) Welche bedingte Entropie hat Y unter der Voraussetzung, daß X bekannt ist?

f) Bestimmen Sie die gemeinsame Entropie sowie die wechselseitige Information von X und Y!

Aufgabe 2: *(2 Punkte)*

Die Zufallsvariable X nehme die Werte 1 und 2 jeweils mit Wahrscheinlichkeit 1/3 an, 3 und 4 jeweils mit Wahrscheinlichkeit 1/6.

a) Finden Sie einen binären Code mit minimalem Erwartungswert für die Länge der Codewörter, und vergleichen Sie diesen Erwartungswert mit der Entropie von X!

b) Ist die Ungleichung von Kraft in diesem Fall eine Gleichung?

Aufgabe 3: *(3 Punkte)*

X sei eine Zufallsvariable mit endlichem Alphabet, und C sei ein eindeutig dekodierbarer Code für X. Zeigen Sie, daß es dann auch einen Praefixcode für X gibt, der dieselbe mittlere Länge hat!

Aufgabe 4: *(2 Punkte)*

a) Unter welcher Bedingung können Sie bei einer Sportwette *mit Sicherheit* gewinnen?

b) In derselben Situation könnten Sie auch nach der Strategie von Kelly wetten oder aber auch alles auf das Pferd setzen, bei dem das Produkt aus Gewinnwahrscheinlichkeit und Quote am größten ist. Vergleichen Sie die Erwartungswerte und Risiken dieser Strategien!

Aufgabe 5: *(2 Punkte)*

Definieren Sie *kurz* den Begriff eines log-optimalen Portfolios und erläutern Sie die wichtigsten Vor- und Nachteile dieser Investmentstrategie!

Aufgabe 6: *(5 Punkte)*

a) Berechnen Sie die Singulärwertzerlegung von $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$!

b) Welche 2×3-Matrix vom Rang 1 unterscheidet sich im Sinne der kleinsten Quadrate am wenigsten von A?

Abgabe bis zum Freitag, dem 27. Mai 2011, um 12.00 Uhr