Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

1. April 2011

7. Übungsblatt Mathematik und Information

Aufgabe 1: *(7 Punkte)*

X und Y seien zwei reellwertige Zufallsvariablen mit Korrelationskoeffizient ρ.

a) Bestimmen Sie die Korrelationsmatrix $\mathrm{Korr}(X, Y)$ sowie deren Eigenwerte und Eigenvektoren!

b) Vergleichen Sie die Eigenvektoren mit den Vektoren c_i, deren j-te Komponente gleich $\cos\left(\frac{(2j-1)(i-1)\pi}{4}\right)$ ist!

c) Welche Linearkombinationen von X und Y, d.h. welche Zufallsvariablen $U = aX + bY$ und $V = cX + dY$, sind voneinander (statistisch) unabhängig?

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

$X_1, \dots, X_n$ seien Zufallsvariablen, die allesamt Erwartungswert a und Standardabweichung σ haben. Die Korrelation zwiscchen X_i und X_{i+1} sei ρ.

a) Bestimmen Sie die Kovarianzmatrix $A = \mathrm{Cov}(X_1, \dots, X_n)$!

b) $b_1, \dots, b_n$ sei eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von A, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ seien die zugehörigen Eigenwerte, und $Y_1, \dots, Y_n$ seien die entsprechenden Linearkombinationen der X_i, für die $\mathrm{Cov}(Y_1, \dots, Y_n)$ eine Diagonalmatrix ist. Welche Standardabweichungen haben die Y_i?

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) A sei eine (nicht notwendigerweise quadratische) Matrix. Zeigen Sie, daß die Matrizen $B = AA^T$ und $C = A^TA$ diagonalisierbar sind!

b) Die Matrix A sei quadratisch und diagonalisierbar. Wie hängen die die Eigenwerte von A und A^T zusammen?

c) Ist in diesem Fall $B = C$?

Aufgabe 4: *(3 Punkte)*

A sei eine reelle $n \times n$-Matrix, für die $A^{-1} = A^T$ ist. Zeigen Sie, daß die Spalten von A eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ bilden!

Abgabe bis zum Freitag, dem 8. April 2011, um 12.00 Uhr