

18. März 2011

## 5. Übungsblatt Mathematik und Information

### Aufgabe 1: (8 Punkte)

$\mathcal{X} = X_1, X_2, \dots$  sei eine stationäre MARKOV-Kette mit Alphabet  $A = \{a, b\}$  und Übergangsmatrix  $A = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix}$ .

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen und Entropien der einzelnen Zufallsvariablen  $X_n$ !
- Bestimmen Sie die Entropierate dieses Prozesses!
- Wie muß man  $p$  und  $q$  wählen, damit diese Rate möglichst groß bzw. möglichst klein wird?

### Aufgabe 2: (4 Punkte)

$\mathcal{X} = X_1, X_2, \dots$  sei ein stochastischer Prozess mit Alphabet  $A$ ,  $f: A \rightarrow B$  sei eine Abbildung, und der stochastische Prozess  $\mathcal{Y} = Y_1, Y_2, \dots$  sei definiert durch  $Y_i = f(X_i)$ . Zeigen Sie, daß für die Entropieraten der beiden Prozesse gilt:  $H(\mathcal{Y}) \leq H(\mathcal{X})$

### Aufgabe 3: (4 Punkte)

$X$  sei eine Zufallsvariable mit einem sechsbuchstabigen Alphabet  $A$ ; dessen Elemente werden über einem Code-Alphabet  $C$  kodiert durch Sequenzen der Längen 1, 1, 2, 3, 3 und 2. Wie viele Zeichen muß  $C$  mindestens enthalten?

### Aufgabe 4: (4 Punkte)

$X$  sei eine Zufallsvariable mit Alphabet  $A$ ; dessen Elemente sollen kodiert werden über einem Codealphabet  $C$  mit  $D$  Elementen. Zeigen Sie: Genau dann gibt es einen Code mit mittlerer Codelänge  $H_D(X)$ , wenn die Wahrscheinlichkeit eines jeden Buchstaben  $a \in A$  eine Potenz von  $1/D$  ist!

Abgabe bis zum Freitag, dem 25. März 2011, um 12.00 Uhr