Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

11. März 2011

4. Übungsblatt Mathematik und Information

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

X und Y seien Zufallsvariablen mit Werten in $\{0, 1\}$; ihre gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung sei gegeben durch $p(0, 0) = \frac{1}{2}, p(0, 1) = p(1, 1) = \frac{1}{4}$ und $p(1, 0) = 0$.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen p_X und p_Y der beiden Zufallsvariablen!

b) Berechnen Sie $H(X), H(Y), H(X, Y), H(X|Y), H(Y|X)$ und $I(X; Y)$!

c) Was sind die Kullback-Leibler-Distanzen $d(p_X \| p_Y)$ und $d(p_Y \| p_X)$?

Aufgabe 2: *(4 Punkte)*

a) Ein fairer Würfel wird geworfen; die Zufallsvariable X mit Werten in $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ gibt an, welche Zahl oben liegt, Y sagt, welche unten liegt, und Z, welche nach vorne zeigt. Bestimmen Sie die wechselseitigen Informationen $I(X; Y)$, $I(X, Z)$ und $I(Z; Y)$!

b) Was sind die bedingten wechselseitigen Informationen $I(X; Y|Z)$ und $I(X; Z|Y)$?
Hinweis: Die Zahlen auf gegenüberliegenden Seiten eines Würfels ergänzen sich stets zu sieben.

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*

a) X sei eine Zufallsvariable mit Werten im Alphabet A und $f: A \to B$ und sei eine Abbildung. Zeigen Sie, daß die Entropie der Zufallsvariable $f(X)$ höchstens gleich $H(X)$ sein kann! *(Hinweis: Berechnen Sie die gemeinsame Entropie* $H\big(X, f(X)\big)$ *mit Hilfe der Kettenregel auf zwei Arten!)*

b) Geben Sie ein Beispiel an, bei dem $H\big(f(X)\big) < H(X)$ ist!

c) Zeigen Sie: Ist Y eine Zufallsvariable mit Werten in einem Alphabet B und ist $H(Y|X) = 0$, so gibt es eine Abbildung $f: A \to B$, so daß $Y = f(X)$ ist. Sie können dabei annehmen, daß sowohl X als auch Y jeden Wert aus ihrem Alphabet mit einer positiven Wahrscheinlichkeit produzieren.

Aufgabe 4: *(4 Punkte)*

Die Markov-Kette $X_1, X_2, \ldots$ habe die Übergangsmatrix A und $\nu = \big(p(1), \ldots, p(n)\big)$ sei der Vektor der Wahrscheinlichkeiten, mit denen X_1 die Elemente des gemeinsamen Alphabets $\{1, 2, \ldots, n\}$ annimmt. Finden Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an A und V, die die Stationarität der Markov-Kette garantiert!

Abgabe bis zum Freitag, dem 18. März 2011, um 12.00 Uhr