

4. März 2011

### 3. Übungsblatt Mathematik und Information

#### Aufgabe 1: (5 Punkte)

Das Alphabet  $A = \{a, b\}$  enthalte zwei Elemente, und  $X_1, X_2, \dots$  sei eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen, die  $a$  mit Wahrscheinlichkeit  $2/3$  und  $b$  mit Wahrscheinlichkeit  $1/3$  annehmen. Bestimmen Sie für  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  und  $\varepsilon = \frac{1}{4}$ , wieviel Prozent der Elemente von  $A^{10}$  in  $A_\varepsilon^{10}$  liegen!

#### Aufgabe 2: (7 Punkte)

Eine Quelle produziert Folgen von Nullen und Einsen, wobei die Eins nur eine Wahrscheinlichkeit von  $1/200$  hat.

- Berechnen Sie die Entropie dieser Quelle?
- Die von der Quelle produzierten Bit werden in Blöcken von je hundert Zeichen übertragen. Dazu wird jeder Folge von hundert Nullen und Einsen, die höchstens drei Einsen enthält, ein Codewort zugeordnet. Alle diese Codewörter haben dieselbe Länge. Wie viele Bit müssen das mindestens sein?
- Finden Sie eine im Durchschnitt effizientere Codierung, die mit Codewörtern verschiedener Länge arbeitet!
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Folge auftritt, für die kein Codewort festgelegt wurde?

#### Aufgabe 3: (8 Punkte)

$X_1, X_2, \dots$  sei eine MARKOV-Kette von Zufallsvariablen mit Werten in der Menge  $\{1, 2, 3\}$ . Die Variable  $X_1$  nehme die drei Werte an mit den Wahrscheinlichkeiten  $p_1 = \frac{1}{2}$  und

$$p_2 = p_3 = \frac{1}{4}; \text{ die Übergangsmatrix sei } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der von  $(X_1, X_2)$  produzierten Wertepaare!
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit produziert  $(X_1, \dots, X_5)$  eine Folge von fünf Einsen?
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $X_2$ !
- Ist diese MARKOV-Kette ein stationärer stochastischer Prozess?
- Ist sie irreduzibel?

Abgabe bis zum Freitag, dem 11. März 2011, um 12.00 Uhr