Wolfgang K. Seiler A5, C201
Tel. 2515

25. Februar 2011

2. Übungsblatt Mathematik und Information

Aufgabe 1: *(8 Punkte)*

a) I sei eine (nicht notwendigerweise endliche) Menge, und für jedes $i \in I$ sei eine konvexe Menge $A_i \subseteq \mathbb{R}^n$ gegeben. Zeigen Sie, daß dann auch der Durchschnitt $\bigcap_{i \in I} A_i$ konvex ist!

b) Folgern Sie, daß es für jede Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kleinste konvexe Menge A gibt, die M enthält. A wird als die *konvexe Hülle* von M bezeichnet.

c) Was ist die konvexe Hülle von $M = \{(0,0), (2,0), (0,3)\}$?

d) Nun sei M die Vereinigung der beiden Kreise mit Radius eins um die Punkte $(-5,0)$ und $(5,0)$. Was ist jetzt die konvexe Hülle von M ?

Aufgabe 2: *(4 Punkte)*

a) Eine Nachrichtenquelle hat ein Alphabet aus n Buchstaben; ihre Wahrscheinlichkeiten sind $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$. Zeigen Sie, daß die Entropie dieser Quelle zunimmt, falls man irgendwelche $m \leq n$ dieser Wahrscheinlichkeiten durch ihr arithmetisches Mittel ersetzt!

b) Eine andere Nachrichtenquelle produziert ebenfalls n Buchstaben, und es ist bekannt, daß jeder davon mindestens mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2n}$ vorkommt. Finden Sie eine untere und eine obere Grenze für die Entropie der Quelle, und bestimmen Sie alle Fälle, in denen diese beiden Grenzen angenommen werden!

Aufgabe 3: *(8 Punkte)*

a) Wie läßt sich der Algorithmus aus der Vorlesung modifizieren, um unter *elf* gleich aussehenden Kugeln, von denen mindestens zehn dasselbe Gewicht haben, eine eventuell abweichende zu finden?

b) Gegeben seien 13 gleich aussehende Kugeln, von denen bekannt ist, daß genau eine ein abweichendes Gewicht hat. Läßt sich durch höchstens dreimaliges Wiegen feststellen, welche dies ist und ob sie zu leicht oder zu schwer ist?

c) Bestimmen Sie die maximale Anzahl von Kugeln, für die man das Problem aus *a)* mit *zweimaligem* Wiegen lösen kann! Was ändert sich, wenn bekannt ist, daß genau eine Kugel das falsche Gewicht hat? Was ändert sich, wenn bekannt ist, daß genau eine Kugel schwerer ist als der Rest?

Abgabe bis zum Freitag, dem 4. März 2011, um 12.00 Uhr