Wolfgang K. Seiler A5, C201
Tel. 2515

18. Februar 2011

1. Übungsblatt Mathematik und Information

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*
Ein von einer Nachrichtenquelle produziertes Zeichen kommt für den Empfänger umso überraschender, je unwahrscheinlicher es ist. Wenn wir versuchen, dies durch eine Funktion $\ddot{U}(p)$ zu beschreiben, liegt es nahe, zu fordern, daß $\ddot{U}(p)$ erstens *stetig* sein soll, zweitens *streng monoton fallend,* und drittens wollen wir auch hier wieder verlangen, daß sich nichts an der Gesamtüberraschung ändert, wenn der Sender eine Entscheidung in zwei Teile aufteilt, d.h. wir fordern, daß $\ddot{U}(pq) = \ddot{U}(p) \cdot \ddot{U}(q)$ sein soll.

a) Zeigen Sie: Zu jeder solchen Funktion $\ddot{U}(p)$ gibt es ein $a > 1$, so daß $\ddot{U}(p) = \log_a \frac{1}{p}$ ist!

b) Speziell für $a = 2$ ist die Entropie der Quelle gleich dem Erwartungswert von $\ddot{U}(p)$.

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*
Eine Nachrichtenquelle produziert drei Zeichen a, b, c jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/3$.

a) Berechnen Sie die Entropie der Quelle!

b) Finden sie eine Kodierung der drei Zeichen durch Folgen von Binärzahlen, so daß die mittlere Anzahl der benötigten Binärziffern möglichst klein ist!

c) Um wieviel können Sie diese verringern, wenn Sie anstelle der einzelnen Zeichen Paare kodieren unter der Annahme, daß jedes mögliche Paar dieselbe Wahrscheinlichkeit hat?

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*
Eine Nachrichtenquelle produziert Zahlen aus der Menge $\{0, 1, 2, \ldots, 10\}$ nach folgender Regel: Sie wirft eine Münze so lange, bis erstmalig die Zahl oben liegt, höchstens jedoch zehn Mal. Falls beim i-ten Wurf erstmalig *Zahl* erscheint, gibt sie das Ergebnis i aus; falls die Münze zehn Mal hintereinander den Kopf zeigt, wird die Null ausgegeben. Berechnen Sie die Entropie dieser Quelle!

Hinweis: $\displaystyle\sum_{i=0}^{N} iq^i = \frac{nq^{n+2} - (n+1)q^{n+1} + q}{(1-q)^2}$

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*
Ordnet man die Worte einer Sprache nach ihre Häufigkeit, so hat nach dem Zipfschen Gesetz in seiner einfachsten Form das i-te Wort eine Wahrscheinlichkeit proportional zu $1/i$. Im Falle der englischen Sprache ging Shannon aus von einer Proportionalitätskonstante 0,1.

a) Finden Sie die kleinste Zahl N, für die $\sum_{i=1}^{N} \frac{0{,}1}{i} \geq 1$ ist!

b) Berechnen Sie die Entropie einer Quelle, die englische Wörter produziert, unter der Annahme, daß das Alphabet aus N Wörtern besteht, deren i-tes mit Wahrscheinlichkeit $0{,}1/i$ auftritt! *(Diese Aufgabe kann natürlich nur mit einem Computer oder zumindest einem programmierbaren Taschenrechner gelöst werden.)*

Abgabe bis zum Freitag, dem 25. Februar 2011, um 12.15 Uhr