Diagonalisierbarkeit symmetrischer Matrizen

a) Eigenwerte und Eigenvektoren

Die Matrix einer linearen Abbildung $\varphi\colon V \to V$ bezüglich einer Basis $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ ist genau dann eine Diagonalmatrix, wenn jeder der Basisvektoren b_i von φ auf ein Vielfaches $\lambda_i b_i$ von sich selbst abgebildet wird; alsdann ist die Abbildungsmatrix gleich der Diagonalmatrix mit Einträgen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Somit hängt es sehr von der Basis ab, ob die Abbildungsmatrix Diagonalgestalt hat oder nicht.

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

etwa ist ganz sicher keine Diagonalmatrix. Betrachten wir die lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4; \quad v \mapsto Av$$

aber bezüglich der Basis $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ mit

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

so rechnet man leicht nach, daß

$$\varphi(b_1) = Ab_1 = 2b_1, \quad \varphi(b_2) = 2b_2, \quad \varphi(b_3) = -4b_3 \quad \text{und} \quad \varphi(b_4) = 4b_4$$

ist, bezüglich $\mathcal{B}$ hat φ also die Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

als Abbildungsmatrix. Wenn keine schwerwiegenden anderen Gründe dagegensprechen, wird es bei umfangreichen Rechnungen mit der Matrix A meist eine gute Idee sein, statt mit der Standardbasis von $\mathbb{R}^4$ mit der Basis $\mathcal{B}$ zu rechnen. So ist beispielsweise die Berechnung der inversen Matrix von D eine einfache Kopfrechenaufgabe, wohingegen die Berechnung von

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

doch einiges an Aufwand erfordert. Genauso ist die Berechnung von

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 524800 & 0 & -523776 & 0 \\ 0 & 524800 & 0 & -523776 \\ -523776 & 0 & 524800 & 0 \\ 0 & -523776 & 0 & 524800 \end{pmatrix}$$

mit erheblicher Arbeit verbunden, während man für die von D^{10} nur wissen muß, daß $2^{10} = 1\,024$ und $2^{20} = 1\,048\,576$ ist.

Definition: Ein Vektor $v \in k^n \setminus \{0\}$ heißt *Eigenvektor* der Matrix $A \in k^{n\times n}$, wenn es eine Zahl $\lambda \in k$ gibt, so daß $Av = \lambda v$ ist. Dieses λ bezeichnen wir als einen *Eigenwert* von A.

Der seltsame Name *Eigenwert* läßt sich vielleicht am besten verstehen, wenn man seine Anwendung in der Quantenmechanik betrachtet: Dort werden *Observable,* d.h. physikalische Meßgrößen, durch Matrizen beschrieben und Zustände durch Vektoren. Die möglichen Ergebnisse einer Messung sind die Eigenwerte der zugehörigen Matrix, und nach der Messung ist der Zustand des Systems ein Eigenvektor zum gemessenen Eigenwert. Die in der Quantenmechanik auftretenden Matrizen sind allesamt so, daß es eine Basis aus Eigenvektoren gibt.

Falls es also zu einer Matrix A eine Basis aus Eigenvektoren gibt, können wir sie also bezüglich dieser Basis als Diagonalmatrix darstellen.

Offensichtlich ist mit einem Vektor v auch jedes Vielfache (außer dem nach Definition ausgeschlossenen Nullvektor) ein Eigenvektor zum selben Eigenwert; allgemeiner ist sogar jede Linearkombination (außer 0) von Eigenvektoren zum Eigenwert λ wieder ein Eigenvektor zum Eigenwert λ, d.h. die Eigenvektoren zu einem festen Eigenwert λ bilden zusammen mit dem Nullvektor einen Untervektorraum von V, den sogenannten *Eigenraum* von λ.

Definition: Die Dimension des Eigenraums von λ heißt *geometrische Vielfachheit* des Eigenwerts λ.

Lemma: Sind $v_1, \ldots, v_r \in V$ Eigenvektoren der linearen Abbildung $\varphi: V \to V$ zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, so sind diese Vektoren linear unabhängig.

Beweis: Angenommen, $v_1, \ldots, v_r$ seien linear abhängig. Dann können wir eine Zahl $2 \leq s \leq r$ finden, so daß zwar $v_1, \ldots, v_s$ linear abhängig sind, nicht aber $v_1, \ldots, v_{s-1}$. Es gibt daher Skalare $\alpha_i \in k$, so daß

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_s v_s = 0$$

ist. Wenden wir auf beide Seiten dieser Gleichung die Abbildung φ an und beachten, daß $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$ ist, folgt, daß auch

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \alpha_s \lambda_s v_s = 0$$

ist. Andererseits können wir obige Gleichung auch einfach mit λ_s multiplizieren mit dem Ergebnis, daß

$$\lambda_s \alpha_1 v_1 + \cdots + \lambda_s \alpha_s v_s = 0 .$$

Durch Subtraktion der letzten beiden Gleichungen voneinander erhalten wir eine lineare Abhängigkeit

$$\alpha_1(\lambda_s - \lambda_1)v_1 + \cdots + \alpha_{s-1}(\lambda_s - \lambda_{s-1})v_{s-1} = 0$$

zwischen $v_1, \ldots, v_{s-1}$. Da diese Vektoren linear unabhängig sind, müssen alle Koeffizienten verschwinden. Da die Eigenwerte $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ aber allesamt verschieden sind, ist dies nur möglich, wenn α_1 bis α_{s-1} verschwinden. Wegen $v_s \neq 0$ muß dann aber auch α_s verschwinden, im Widerspruch zur angenommenen linearen Unabhängigkeit von $v_1, \ldots, v_s$. ■

b) Vielfachheiten von Eigenwerten

Ist x eine Nullstelle eines Polynoms $f(X)$, so kann $f(X)$ bekanntlich durch $(X - x)$ geteilt werden, und x heißt *r-fache Nullstelle* von $f(X)$, wenn $f(X)$ durch $(X - x)^r$ teilbar ist, nicht aber durch $(X - x)^{r+1}$.

Definition: Wir sagen, der Eigenwert λ von φ *bzw.* A habe die *algebraische Vielfachheit* r, wenn λ eine r-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist.

Im obigen Beispiel hatte also der Eigenwert Null die algebraische Vielfachheit zwei, die anderen beiden hatten algebraische Vielfachheit eins. Die Dimension des jeweiligen Eigenraums, die geometrische Vielfachheit also, war genauso groß, jedoch muß dies im allgemeinen nicht der Fall sein: Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

etwa hat das charakteristische Polynom

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2$$

die doppelte Nullstelle eins, $\lambda = 1$ ist also ein Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit zwei. Der zugehörige Eigenraum ist die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$0x_1 + 1x_2 = 0$$

$$0x_1 + 0x_2 = 0 ,$$

also gerade die Menge aller Vektoren der Form $\binom{x}{0}$ und somit eindimensional. Die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts eins ist daher nur eins.

Das Beispiel der Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x\cos\vartheta - y\sin\vartheta \\ y\cos\vartheta + x\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

mit Abbildungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

zeigt, daß es überhaupt keine Eigenwerte geben muß, denn hier ist das charakteristische Polynom gleich

$$\begin{vmatrix} \cos\vartheta - \lambda & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta - \lambda \end{vmatrix} = (\cos\vartheta - \lambda)^2 + \sin^2\vartheta\,.$$

Abgesehen vom Fall $\sin\vartheta = 0$, wenn A gleich der positiven oder negativen Einheitsmatrix ist, hat dieses Polynom keine reelle Nullstelle, da es nur positive Werte annimmt. Es hat aber natürlich die beiden komplexen Nullstellen

$$\lambda_{1/2} = \cos\vartheta \pm i\sin\vartheta = e^{\pm i\vartheta}\,;$$

fassen wir φ als Abbildung von $\mathbb{C}^2$ nach $\mathbb{C}^2$ auf, gibt es also zwei Eigenwerte. Beide haben die algebraische und geometrische Vielfachheit eins; zugehörige Eigenvektoren sind etwa $\binom{1}{i}$ und $\binom{1}{-i}$. Wählen wir diese beiden Vektoren als Basis, so wird die Abbildungsmatrix von φ bezüglich dieser neuen Basis zur Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} e^{i\vartheta} & 0 \\ 0 & e^{-i\vartheta} \end{pmatrix}.$$

Allgemein gilt für die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten von Eigenvektoren

Satz: *a)* Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts ist stets kleiner oder gleich der algebraischen Vielfachheit.
b) Die Summe der algebraischen Vielfachheiten der verschiedenen Eigenwerte einer linearen Abbildung ist kleiner oder gleich der Dimension des Vektorraums.

Beweis: a) Der Eigenwert λ der $n \times n$-Matrix A habe die geometrische Vielfachheit r, d.h. der zugehörige Eigenraum habe die Dimension r. Wir wählen eine Basis $b_1, \dots, b_r$ dieses Eigenraums und ergänzen sie zu einer Basis des gesamten Vektorraums; bezüglich dieser Basis sei C die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung

$$\varphi\colon \begin{cases} k^n \to k^n \\ v \mapsto Av \end{cases}.$$

Da $b_1, \dots, b_r$ Eigenvektoren zum Eigenwert λ sind, ist $\varphi(b_i) = \lambda b_i$. In den ersten r Spalten von C steht also jeweils in der Diagonalen das Element λ und ansonsten überall die Null. A hat somit die Form

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & M & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & & & \end{pmatrix},$$

wobei uns weder die mit $*$ bezeichneten Körperelemente noch die $(n-r) \times (n-r)$-Matrix M weiter zu interessieren brauchen.

Für $C - xE$ gilt dasselbe, nur daß jetzt $\lambda - x$ in der Diagonalen steht, d.h. diese Matrix hat die Form

$$\begin{pmatrix} \lambda - x & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda - x & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda - x & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & M - xE_{n-r} & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & & & \end{pmatrix},$$

wobei E_{n-r} die $(n-r) \times (n-r)$-Einheitsmatrix bezeichnet.

Zur Berechnung ihrer Determinanten verwenden wir den LAPLACEschen Entwicklungssatz: Da in der ersten Zeile (oder Spalte) nur an der ersten Stelle ein von Null verschiedener Eintrag steht, ist diese Determinante gleich $(\lambda - x)$ mal der Determinante jener Matrix, die durch Streichen der ersten Zeile und Spalte entsteht. Falls $r > 1$ ist, hat diese neue Matrix dieselbe Form, wir können den LAPLACEschen Entwicklungssatz also noch einmal anwenden *usw.;* wir erhalten schließlich

$$\det(C - xE) = (\lambda - x)^r \det(M - xE_{n-r})\,.$$

Somit ist $\det(C - xE)$ durch $(x - \lambda)^r$ teilbar.

Was uns wirklich interessiert, ist aber nicht $\det(C - xE)$, sondern $\det(A - xE)$. Ist B die Matrix des Basiswechsels von der Standardbasis des k^n auf die Basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$, jene Matrix also, deren Spaltenvektoren die b_i sind, so ist $C = B^{-1}AB$ und

$$\begin{aligned}\det(C - xE) &= \det(B^{-1}AB - xE) = \det(B^{-1}AB - xB^{-1}EB)\\ &= \det\bigl(B(A - xE)B^{-1}\bigr) = \det B \det(A - xE)(\det B)^{-1}\\ &= \det(A - xE)\,.\end{aligned}$$

A und C haben also dasselbe charakteristische Polynom, und somit ist auch das charakteristische Polynom von A durch $(x - \lambda)^r$ teilbar. Die algebraische Vielfachheit von λ ist daher mindestens r.

Unabhängig von diesem Ergebnis wollen wir noch festhalten, daß nach der gerade durchgeführten Rechnung für eine beliebige Matrix A und eine invertierbare Matrix B die beiden Matrizen A und BAB^{-1} dasselbe charakteristische Polynom haben; insbesondere haben also die Abbildungsmatrizen einer linearen Abbildung zu verschiedenen Basen dasselbe charakteristische Polynom.

b) Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$ die verschiedenen Eigenwerte von φ und sind $r_1, \ldots, r_\ell$ ihre algebraischen Vielfachheiten, so ist das charakteristische Polynom $\det(A - xE)$ teilbar durch

$$(x - \lambda_1)^{r_1} \cdots (x - \lambda_\ell)^{r_\ell}\,.$$

Dies ist ein Polynom vom Grad $r_1 + \cdots + r_\ell$, wohingegen das charakteristische Polynom Grad n hat; daher ist

$$r_1 + \cdots + r_\ell \le n\,,$$

denn der Grad eines Teilers kann nicht größer sein als der des Polynoms selbst.

■

c) Eigenwerte symmetrischer und Hermitescher Matrizen

Wie wir im letzten Paragraphen gesehen haben, kann die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts kleiner sein als die algebraische, und im Falle einer reellen Matrix müssen nicht auch die Eigenwerte reell sein. In diesem Abschnitt wollen wir sehen, daß solche Dinge bei symmetrischen

(und auch den noch zu definierenden HERMITEschen) Matrizen nicht möglich sind.

a) Für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ bezeichnen wir die Matrix $\overline{A} = \bigl(\overline{a_{ij}}\bigr)$ als die zu A *konjugiert komplexe Matrix*.
b) $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt HERMITEsch, falls $A^T = \overline{A}$ ist.
c) Zu einem Vektor $v = \begin{pmatrix} v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}$ heißt $\overline{v} = \begin{pmatrix} \overline{v_1}\\ \vdots\\ \overline{v_n}\end{pmatrix}$ der *konjugiert komplexe* Vektor.

Schließlich wollen wir Vektoren hier mit $1 \times n$-Matrizen identifizieren; insbesondere rechnen wir mit dem „transponierten Vektor"

$$v^T = (v_1, \ldots, v_n)\,.$$

Mit dieser Bezeichnung kann das Standardskalarprodukt zweier Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ als Matrixprodukt $v^T w$ geschrieben werden; das Standard-HERMITEsche Produkt in $\mathbb{C}^n$ ist entsprechend $v^T\,\overline{w}$.

Da die komplexe Konjugation auf $\mathbb{R}$ keine Wirkung hat, ist eine HERMITEsche Matrix mit reellen Einträgen einfach eine symmetrische Matrix; wir können uns im folgenden bei den Beweisen daher auf HERMITEsche Matrizen beschränken und erhalten trotzdem Ergebnisse, die auch für reelle symmetrische Matrizen gelten.

Das Hauptziel dieses Abschnitts ist

Satz: A sei eine symmetrische reelle oder HERMITEsche (komplexe) Matrix.
a) Dann sind alle Eigenwerte von A reell.
b) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal bezüglich des Standard- *bzw.* HERMITEschen Skalarprodukts.
c) Für jeden Eigenwert von A ist die geometrische Vielfachheit gleich der algebraischen Vielfachheit.
d) $\mathbb{R}^n$ *bzw.* $\mathbb{C}^n$ hat eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A.

Beweis: a) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A, so gibt es nach Definition einen Vektor $v \neq 0$, so daß $Av = \lambda v$ ist. Da die komplexe Konjugation mit sämtlichen Grundrechenarten vertauschbar ist, folgt, daß

$$\overline{A}\,\overline{v} = \overline{\lambda}\,\overline{v}\,,\quad \text{d.h.}\quad v^T\overline{A}\,\overline{v} = v^T\overline{\lambda}\,\overline{v} = \overline{\lambda}\,v^T\,\overline{v}\,.$$

Bislang gilt alles noch für beliebige $n \times n$-Matrizen; um die Symmetrie *bzw.* HERMITE-Eigenschaft von A ins Spiel zu bringen, betrachten wir den Vektor $(^T Av) = v^T\ A^T$. Da nach Voraussetzung $A^T = \overline{A}$ ist, können wir die rechte Seite der Gleichung auch als $v^T\ \overline{A}$ schreiben, und die linke Seite als $(\lambda v)^T = \lambda v^T$, da v Eigenvektor von A ist. Somit können wir die Zahl $v^T \overline{A}\,\overline{v}$ auch schreiben als

$$v^T \overline{A}\,\overline{v} = \left(v^T\ \overline{A}\right)\overline{v} = \lambda\, v^T\, \overline{v}\,.$$

Somit haben wir die beiden Darstellungen

$$v^T \overline{A}\,\overline{v} = \lambda\, v\, ^T \overline{v} \quad \text{und} \quad v^T \overline{A}\,\overline{v} = \overline{\lambda}\, v\, ^T \overline{v}\,,$$

die nur dann beide richtig sein können, wenn $\lambda = \overline{\lambda}$ und somit reell ist; denn $v^T\ \overline{v}$ kann wegen der Definitheit HERMITEscher Skalarprodukte für einen Vektor $v \neq 0$ nicht verschwinden.

b) v sei Eigenvektor zum Eigenwert λ, und w sei Eigenvektor zum davon verschiedenen Eigenwert μ, d.h.

$$Av = \lambda v \quad \text{und} \quad Aw = \mu w \quad \text{und} \quad \lambda \neq \mu\,.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \lambda\, v^T \overline{w} &= (\lambda v)^T \overline{w} = (Av)^T \overline{w} = v^T\ A^T \overline{w} \\ &= v^T \overline{A}\,\overline{w} = v^T \overline{Aw} = v^T \overline{\mu w} = \overline{\mu}\, v^T \overline{w}\,. \end{aligned}$$

Wie wir schon wissen, sind alle Eigenwerte reell, d.h. $\overline{\mu} = \mu \neq \lambda$. Die obige Gleichungskette kann daher nur richtig sein, wenn $v^T\ \overline{w}$ verschwindet, d.h. wenn v und w orthogonal sind.

Beim Beweis von *c)* gehen wir im wesentlichen genauso vor wie im vorigen Abschnitt, als wir zeigten, daß die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts stets kleiner oder gleich der algebraischen ist; die zusätzliche Annahme über die Matrix A wird zeigen, daß hier die beiden Vielfachheiten sogar gleich sind.

λ sei also ein Eigenwert von A mit geometrischer Vielfachheit r, d.h. der zugehörige Eigenraum habe die Dimension r. Wir wählen eine Basis $\{b_1, \ldots, b_r\}$ davon und ergänzen sie zu einer Basis $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ des gesamten Vektorraums $V = \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$. Indem wir nötigenfalls das GRAM-SCHMIDTsche Orthogonalisierungsverfahren anwenden und

anschließend die Längen aller Vektoren auf eins normieren, können wir annehmen, daß es sich dabei um eine Orthonormalbasis handelt.

Nun betrachten wir die lineare Abbildung

$$\varphi\colon V \to V; \quad v \mapsto Av\,.$$

Bezüglich der Standardbasis hat sie A als Abbildungsmatrix; für uns interessanter ist aber die Abbildungsmatrix C bezüglich der neuen Basis $\mathcal{B}$. Dazu sei B die Matrix mit Spaltenvektoren b_i; da der Eintrag an der Stelle (i, j) eines Matrixprodukts das (Standard-)Skalarprodukt des i-ten Zeilenvektors des ersten Faktors mit dem j-ten Spaltenvektor des zweiten Faktors ist, steht an der Stelle (i, j) der Matrix $B^T\overline{B}$ das (Standard) HERMITEsche Produkt der Vektoren b_i und b_j. Da $\mathcal{B}$ als Orthonormalbasis gewählt wurde, ist daher

$$B^T\overline{B} = E \quad \text{und damit} \quad B^T = \overline{B}^{\,-1} = \overline{B^{-1}}\,.$$

Aus dieser Formel folgt, daß mit A auch C eine HERMITEsche Matrix ist, denn

$$C^T = (B^{-1}AB)^T = B^T\ A^T\ i\left(B^T\right)^{-1} = \overline{B^{-1}}\,\overline{A}\,\overline{B} = \overline{B^{-1}AB} = \overline{C}\,.$$

Die ersten r Basisvektoren b_i sind Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ; für $i \le r$ ist daher $\varphi(b_i) = \lambda b_i$, d.h. in der i-ten Spalte von C steht an der i-ten Stelle die reelle Zahl λ und ansonsten überall die Null, genau wie auch im vorigen Abschnitt. Im Gegensatz zu dort haben wir nun aber eine HERMITEsche Matrix; da in der i-ten Spalte abgesehen von λ auf der Hauptdiagonalen nur Nullen stehen, muß daher dasselbe auch für die i-te Zeile gelten; die Matrix C hat also die Form

$$C = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & M & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & & & \end{pmatrix},$$

wobei M eine $(n-r)\times(n-r)$-Matrix ist, die uns nicht weiter zu interessieren braucht. Damit hat $C - xE$ die Form

$$\begin{pmatrix} \lambda - x & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda - x & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda - x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \mathsf{M} - \mathsf{x}\mathsf{E}_{n-r} & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & & & \end{pmatrix},$$

wobei E_{n-r} die $(n-r)\times(n-r)$-Einheitsmatrix bezeichnet.

Wie wir uns schon im vorigen Abschnitt überlegten beim Beweis, daß die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts immer kleiner oder gleich der algebraischen ist, haben A und C dasselbe charakterische Polynom; da wir die Matrix C besser kennen, rechnen wir mit ihr.

Wie in Abschnitt *d)* folgt auf Grund der obigen Form der Matrix $C - xE$ aus dem LAPLACEschen Entwicklungssatz, daß

$$\det(A - xE) = \det(C - xE) = (\lambda - x)^r \det(M - xE_{n-r})$$

ist, wobei E_{n-r} die $(n-r)\times(n-r)$-Einheitsmatrix bezeichnet. Wir müssen zeigen, daß die algebraische Vielfachheit von λ *genau* gleich r ist, daß also λ keine Nullstelle von $\det(M - xE_{n-r})$ sein kann.

Wäre λ Nullstelle von $\det(M - xE_{n-r})$, so hätte M den Eigenwert λ, es gäbe also einen $(n-r)$-dimensionalen Eigenvektor w von M. Wegen der speziellen Form der Matrix C ist für jeden Eigenvektor

$$w = \begin{pmatrix} w_{r-1} \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \quad \text{von } M \text{ der Vektor} \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ w_{r-1} \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von C und damit von A – Eigenvektoren hängen schließlich nur von der linearen Abbildung ab, nicht von einer speziellen Abbildungsmatrix. Dies widerspricht aber der Voraussetzung, daß der Eigenraum zum Eigenwert λ von $b_1, \dots, b_r$ erzeugt wird, denn v ist linear unabhängig von diesen b_i.

Also hat λ die algebraische Vielfachheit r, und *c)* ist gezeigt.

d) ist nun eine einfache Folgerung aus den übrigen Aussagen und dem sogenannten *Fundamentalsatz der Algebra*, wonach jedes reelle oder komplexe Polynom über den komplexen Zahlen in Linearfaktoren zerfällt:

Wir wissen, daß die Summe der algebraischen Vielfachheiten aller Eigenwerte gleich der Dimension n des Vektorraums ist und daß alle Eigenwerte reell sind; da die algebraischen gleich den geometrischen Vielfachheiten sind, gibt es also n Eigenvektoren, die eine Basis von V bilden.

Für jeden einzelnen Eigenraum können wir die Eigenvektoren nach GRAM-SCHMIDT so wählen, daß sie eine Orthonormalbasis bilden; da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stets orthogonal sind, ist die Vereinigungsmenge dieser Basen Orthonormalbasis von V. ■