Kapitel I: Aristotelische Logik

1: Zur Einstimmung

Wir befinden uns im 14. Jahrhundert in einer Benediktinerabtei im italienischen Appenin.

Der englische Franziskanerbruder William von Baskerville (im Film gespielt von Sean Connery) ist unterwegs in geheimer Mission für Kaiser Ludwig. Zusammen mit seinem Schüler, dem deutschen Benediktinernovizen Adson von Melk, und Severin von St Emmeram, dem Apotheker der Abtei, steht er nun bereits vor der dritten Leiche seit seiner Ankunft vor vier Tagen.

Adson von Melk berichtet uns über das Gespräch der drei Mönche:

> „Ich weiß nicht“, sagte Severin und schüttelte weiter den Kopf. „Zwei Tote, beide mit schwarzen Fingern... Was schließt Du daraus?“
>
> „Nichts schließe ich daraus: *Nihil sequitur geminis ex particularibus unquam.* Man müßte die beiden Fälle auf eine gemeinsame Regel zurückführen können. Zum Beispiel: Es gibt eine Substanz, die jedem, der sie berührt, die Finger schwärzt...“
>
> Triumphierend beendete ich den Syllogismus: „Venantius und Berengar haben geschwärzte Finger, *ergo* haben sie diese Substanz berührt!“
>
> „Bravo, Adson“, lächelte William. „Nur schade, daß deine Schlußfolgerung nicht gültig ist, denn *aut semel aut iterum medium generaliter esto,* und in deinen Syllogismus erscheint der Mittelbegriff nie allgemeingültig. Ein Zeichen dafür, daß wir die *Praemissa maior* nicht richtig gewählt haben. Ich hätte nicht sagen dürfen: Jeder, der eine bestimmte Substanz berührt, hat schwarze Finger, denn es kann ja auch Menschen mit schwarzen Fingern geben, die diese Substanz nicht berührt haben. Ich hätte sagen müssen: Jeder, der schwarze Finger hat, und sonst niemand, hat mit Sicherheit eine gegebene Substanz berührt. Also Venantius und Berengar und so weiter... Womit wir einen *Darii* hätten, einen exzellenten Dritten Syllogismus der Ersten Figur.“
>
> „Dann hätten wir also die Antwort!“ rief ich befriedigt aus.
>
> *aus* Umberto Eco: Der Name der Rose, *dtv* 1986, *S. 336* oder Theodor G. Bucher: Angewandte Logik, *Sammlung Göschen,* 1987, *S.* 189/190

Die Parallelen zur aus Literatur und Fernsehen wohlbekannten heutigen Verbrechensaufklärung sind unübersehbar: Bereits im 14. Jahrhundert waren die Assistenten der großen Detektive nicht die Hellsten. Es gibt aber auch Unterschiede: Wo ein heutiger Kommisar gesagt hätte „Hol’ schon mal den Wagen, Adson!“, redet William von Baskerville von allgemeingültigen Mittelbegriffens einem *Darii* als dem dritten Syllogismus der ersten Figur.

Hier handelt es sich um Begriffe aus der aristotelischen Syllogistik, allerdings, wie der Gebrauch der lateinischen Sprache zeigt, bezieht sich William von Baskerville nicht direkt auf Aristoteles, sondern auf das, was die Spätscholastik daraus gemacht hatte. Er kennt diese Logik möglicherweise aus dem rund hundert Jahre zuvor erschienenen Buch *Introductiones in Logicam* seines Landsmanns und Namensvetters William von Sherwood[1)], eher aber wohl aus dem einige Jahre später erschienenen Buch von Petrus Hispanus, dem späteren Papst Johannes XXI. Da die oben erwähnte geheime Mission fast sicher im Zusammenhang stand mit den Spannungen zwischen Kaiser Ludwig und Papst Johannes XXII, dem neunten Nachfolger von Johannes XXI, war dieses Buch zwar auch schon recht alt, jedoch erlebte es bis gegen Ende

---

1) Auch Wilhelmus, Willelmus, Guilelmus von Schirewode, Schirwood, Schyrwode, Schyrwodus, Shyreswood, Shyreswode

des achtzehnten Jahrhunderts rund 200 Auflagen und war noch Anfang des siebzehnten Jahrhunderts das Standardwerk zur Logikausbildung an den europäischen Universitäten.

Die aristotelische Logik gar war mehr als zwei *Jahrtausende* lang die Logik schlechthin. Noch 1787 schrieb KANT im Vorwort zur zweiten Auflage seiner *Kritik der reinen Vernunft* auf Seite *B VIII*

> Daß die *Logik* diesen sicheren Gang schon von den ältesten Zeiten her gegangen ist, läßt sich daraus ersehen, daß sie seit dem *Aristoteles* keinen Schritt rückwärts hat tun dürfen, wenn man ihr nicht etwa die Wegschaffung einiger entbehrlicher Subtilitäten, oder deutlichere Bestimmung des Vorgetragenen, als Verbesserungen anrechnen will, welches aber mehr zur Eleganz, als zur Sicherheit der Wissenschaft gehört. Merkwürdig ist noch an ihr, daß sie auch bis jetzt keinen Schritt vorwärts hat tun können, und also allem Ansehen nach geschlossen und vollendet zu sein scheint.

Verglichen mit dem Alter der mathematischen Begriffe aus den heutigen Anfängervorlesungen sind zwei Jahrtausemde ein gewaltiger Zeitraum: Vektorräume gibt es seit weniger als einem Jahrhundert, die ε-δ-Definition der Stetigkeit seit etwa zwei und Differentialquotienten seit rund einem Dritteljahrtausend.

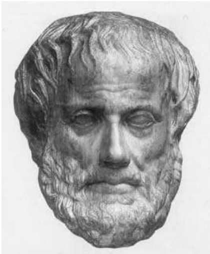
Der langanhaltende Erfolg der aristotelischen Logik ist aber nicht der einzige Grund, warum wir uns auch heute noch damit beschäftigen sollten: Ihre Relevanz für die Mathematik ging nach 1879 sehr schnell zurück und dürfte heute praktisch bei null liegen.

Vor allem in der Ausprägung als *klassische Logik,* die ihr die Spätscholastik gegeben hat, bietet sie auch heute noch ein sehr schönes Beispiel eines abgeschlossenen Kalküls, in dem all' die Probleme, mit denen wir uns in der heutigen Logik herumschlagen müssen, noch nicht existieren.

Vor allem aber muß man mit der aristotelischen Logik vertraut sein, wenn man sich für die Grundlagen der Mathematik interessiert, die ja auch Gegenstand dieser Vorlesung sein sollen. Viele Ansätze bis hin zu HILBERT, dem Begründung des Formalismus und BROUWER, dem des

Intuitionismus, lassen sich nur vor dem Hintergrund der aristotelischen Logik verstehen, die – wie wir gerade gesehen haben – etwa für KANT, auf den sich beide berufen, *die* Logik schlechthin war. Auch in unserer Zeit gibt es wieder, vor allem im Gefolge der HINTIKKA-PARSONS-Debatte, großes Interesse an KANTS Philosophie der Mathematik, für die ganz wesentlich ist, daß sie nicht von unserem heutigen Begriff von Logik ausgeht.

Auch abgesehen davon ist ARISTOTELES für die heutige Philosophie der Mathematik keinesfalls nur von historischen Interesse; auch die vor knapp vierzig Jahren aufgekommene und immer noch anhaltende Quasiempirizismusdebatte etwa erinnert durchaus gelegentlich an seine Kritik an PLATON.



2. Leben und Werk von Aristoteles

Aristoteles wurde 384 vor Christus in Stagira (Nordgriechenland) geboren; sein Vater war Hofarzt des mazedonischen Königs AMYNTAS. Im Alter von siebzehn Jahren wurde er an PLATONS Akademie nach Athen geschickt, wo er zwanzig Jahre teils als Schüler, teils als Lehrer wirkte. Er war dort allerdings nicht nur Schüler PLATONS; bei seiner Ankunft in Athen etwa war PLATON gerade aufgebrochen zu seiner zweiten Sizilienreise (zu DIONYSIOS, dem Tyrannen), und während dieser Zeit leitete der Mathematiker EUDOXOS die Akademie.

EPIKRATES, ein zeitgenössischer Dramatiker, beschreibt den dortigen Alltag in einem seiner Stücke so:

A: Wie steht's mit Platon, Speusippos, Menedemos?
Was ist jetzt ihr Geschäft? Welch' Problemen,
welch' Themen gilt jetzt ihre Untersuchung?

B: Ich sah die Schar der Jungs . . . am Übungsplatz
der Akademie, hörte Reden,
unsagbar, sinnlos: Definitionen über Natur.
Das Wesen der Tiere teilten sie ein,
die Arten der Bäume, der Gemüse Gattungen.
Sie prüften auch den Kürbis, welcher Gattung er wohl sei . . .
Zuerst, da standen alle schweigend,
beugten sich nieder, meditierten, . . .
Auf einmal sagte einer: Ein rund' Gemüse!
Der andre: Kraut! Der dritt': Ein Baum. –
Dies hörend ließ ein Arzt sizil'schen Landes
furzend sich vernehmen: Die wären ja verrückt!

A: Da wurden sie wohl mächtig bös und schrien:
Das ist Beleidigung! Denn nicht geziemt sich's,
im Hörsaal derart sich zu äußern!

B: Den Jungens macht' das gar nichts aus,
und Platon, der dabeistand, sagte
ganz sanft und ohne Zorn:
Versucht's nochmal von Anfang an zu definieren:
Was ist ein Kürbis? – Und die teilten weiter ein . . .

Es könnte sein, daß EPIKRATES keine sehr hohe Meinung von PLATONS Akademie hatte; allerdings beschreibt er hier doch ein wesentliches Element der dortigen Ausbildung: PLATONS Methode der Einteilung oder *Dihairesis* ($\delta\iota\alpha\acute{\iota}\rho\epsilon\sigma\iota\varsigma$), deren Ziel die exakte Definition eines Begriffs war. Die ersten Ansätze der aristotelischen Logik hatten das Ziel, die korrekte *Argumentation* mit den so definierten Begriffen zu lehren.

Nach PLATONS Tod im Jahre 347 war ARISTOTELES neben dem Mathematiker XENOKRATOS einer von drei Nachfolgekandidaten für die Leitung der Akademie; gewählt wurde aber der oben erwähnte SPEUSIPPOS, ein Neffe PLATONS. Daraufhin, und vielleicht auch wegen der antimazedonischen Stimmung in Athen, verließ ARISTOTELES Athen und reiste mit Freunden (drunter auch XENOKRATOS und THEOPHRASTOS, der später Nachfolger von ARISTOTELES werden sollte) durch Kleinasien und Mazedonien. 342 machte ihn PHILIP VON MAZEDONIEN zum

Tutor seines Sohns ALEXANDER, später DER GROSSE genannt. Als dieser nach PHILIPS Ermordung 335 König wurde, kehrte ARISTOTELES nach Athen zurück, allerdings nicht an die Akademie, sondern ans Lykeion (Lyceum), wo eine Gruppe von Philosophen und Naturwissenschaftlern unter seiner Leitung zwölf Jahre lang ein umfassendes Forschungsprogramm durchführte, das einen weiten Bogen von der Philosophie zu den Naturwissenschaften spannte.

Die Nachricht vom Tod ALEXANDERS DES GROSSEN im Jahre 323 löste in Athen eine anti-mazedonische Revolution aus; ARISTOTELES floh nach Chalcis in Euboea, um, wie er sagte, den Athenern zu ersparen, sich ein zweites Mal gegen die Philosophie zu versündigen. Dort starb er 322 an einem Magenleiden.

Seine Schriften zerfallen in zwei Klassen: Die *exoterischen* und die *esoterischen* Schriften. Die ersteren richteten sich (wie PLATONS Dialoge) an ein allgemeines Publikum; neben vielen anderen antiken Autoren pries auch CICERO ihre hohe literarische Qualität. Leider ist fast keines dieser Werke erhalten; nur wenige Fragmente überlebten als Zitate in Werken anderer Autoren.

Die esoterischen Schriften waren für den Gebrauch am Lyceum bestimmt und möglicherweise nie zur Veröffentlichung vorgesehen; einige Forscher betrachten sie als private Manuskripte, anhand derer ARISTOTELES seine Vorlesungen hielt, da sie an manchen Stellen lediglich Stichworte enthalten und auch sonst eine eher trockene Lektüre sind. Für diese Auffassung spricht auch, daß die Tradition der griechischen Philosophie jener Zeit eher auf mündlicher als auf schriftlicher Überlieferung beruhrte; schließlich war auch die Schrift noch nicht sonderlich weit entwickelt: Was wir heute als griechische Schrift bezeichen ist erstmalig im Byzanz des achten und neunten nachchristlichen Jahrhunderts nachgewiesen; zu Zeiten von ARISTOTELES gab es weder Kleinbuchstaben noch Satzzeichen noch Wortzwischenräume.

DASLESENVONLANGENUNDKOMPLIZIERTENTEX
TENWARDAMITAUCHWENNDIEDAMALIGENSTUD
ENTENDARANGEÖHNTWARENSICHERLICHKEINU
NEINGESCHRÄNKTESVERGÜGEN

Die Schriften wurden immer wieder umgearbeitet; auch wurden nachträglich oft Referenzen auf andere Schriften eingefügt, so daß die Entstehungsgeschichte nur sehr schwer zu rekonstruieren ist und sich die Gelehrten noch in vielen Punkten uneins sind. Einige betrachten Teile der Manuskripte als Zusätze von Schülern, und eine gewisse Minderheit redet sogar teilweise von Vorlesungsmitschriften seiner Schüler.

Auch die esoterischen Schriften sind nicht alle erhalten; nach dem Tod von Aristoteles gingen sie an seinen Schüler und Nachfolger Theophrastos und von diesem zu einem Neleos von Scepsis. Dessen Erben hatten offenbar nur geringes Interesse an den Manuskripten, wollten aber auf keinen Fall, daß sie der König von Pergamon für seine Bibliothek beschlagnahmte und versteckten sie daher im Keller ihres Hauses in Scepsis. Dort rotteten sie vor sich hin, bis sie ein Bücherfreund namens Appelicon nach Athen überführte.

Athen wurde 86 vor Christus von Sulla erobert; er konfiszierte die Bücher und brachte sie nach Rom, wo sie sehr unter der Behandlung durch die Kopierer litten – obwohl *(?)* diese damals noch menschlich waren. Erst in der zweiten Hälfte des Jahrhunderts wurden sie schließlich Andronicos von Rhodos übergeben, der sie editieren und publizieren sollte –rund dreihundert Jahre nach dem Tod ihres Autors.

Aristoteles hatte seine verschiedenen Manuskripte nie zu einem Ganzen zusammengefaßt; wahrscheinlich hatte er nie vor, sie als ein Gesamtwerk zu publizieren (wenn überhaupt). Die Einteilung der Werke in Bände geht daher auch Andronicus zurück, und bis heute streiten sich die Gelehrten über die Zweckmäßigkeit seiner Entscheidungen. Trotzdem ist es sowohl bei seiner Zusammenfassung zu Bänden und Teilbänden wie auch bei seinen Titeln geblieben, so daß die griechisch geschriebenen Werke Aristoteles größtenteils unter lateinischen Namen zitiert werden.

Für die Logik geht es vor allem um zwei Werke: Die *Topik* und die *Analytica priora;* beide sind Teil der später zum sogenannten *Organon* zusammengefaßten Werke. *Organon* kommt vom griechischen Wort für Werkzeug, und genau das ist auch der Zweck dieser Bücher.

In der *Topik,* deren erste Anfänge zum Frühwerk gerechnet werden, geht

es um die Anwendung der Logik in der Rhetorik, in der *Analytica priora* um Anwendungen auf Beweise. Den Unterschied erklärt Aristoteles am Anfang der *Topik:*

> Vorhaben der Untersuchung: Ein Verfahren finden, von dem aus wir werden Schlüsse ziehen können über jede aufgegebene Streitfrage aus einleuchtenden Annahmen und selbst, wenn wir Rede stehen müssen, nichts Widersprüchliches zu sagen. Erstens ist nun also zu sagen, was ist ein Schluß und welches sind die Unterschiede darin, damit der Schluß im Untersuchungsgespräch ergriffen wird; den suchen wir nämlich im Sinne der vorgenommenen Untersuchung.
>
> Es ist denn also Schluß: Eine Herleitung, in der bestimmte Aussagen gesetzt, etwas von dem Angesetzten Verschiedenes aus Notwendigkeit aufgrund des Angesetzten eintritt. Ein Beweis ist es dann, wenn aus wahren und unmittelbaren Annahmen der Schluß folgt, oder aus solchen, die von bestimmten wahren Erstannahmen aus den Ausgangspunkt der Erkenntnis darüber genommen haben. Der Schluß im Untersuchungsgespräch dagegen ist der, welcher aus einleuchtenden Annahmen zum Schlußergebnis kommt. Es sind aber wahre und unmittelbare Annahmen solche, die nicht über andere vermittelt, sondern durch sich selbst die Gewähr besitzen, – man darf nämlich bei den wissenschaftlichen Anfangsgründen nicht nach dem „aufgrund wovon?“ suchen, sondern muß annehmen, daß jede der Anfangsannahmen für sich selbst beglaubigt ist. Einleuchtend dagegen sind Annahmen, die allen oder den meisten oder den Klugen so erscheinen, und bei diesen wieder entweder allen oder den meisten oder den angesehensten oder namhaftesten.
>
> *Top.* I,1, 100^a–100^b23

In der Rhetorik oder im Untersuchungsgespräch müssen also die Annahmen nicht bewiesen sein und können eventuell auch falsch sein; ansonsten bedient man sich dort derselben Schlußweisen wie beim wissenschaftlichen Beweis.

Die formale Struktur eines Schlusses ($\sigma\upsilon\lambda\lambda o\gamma\iota\sigma\mu \acute{o}\varsigma$), das was wir heute als Syllogistik bezeichnen, wird erst in der *Analytica priora* untersucht, und da die sogenannte *klassische Logik* die Logik dieser „Syllogismen“ ist, wollen wir uns im folgenden hauptsächlich mit dieser beschäftigen.

3. Syllogismen

Grundbausteine des aristotelischen Syllogismus sind Aussagen. Eine Aussage, bei ARISTOTELES als Prämisse ($\pi\rho\acute{o}\tau\alpha\sigma\iota\varsigma$) bezeichnet, hat eine der folgenden vier Formen:

Typ	**Form**	**Abkürzung**
Universell affirmativ	Alle S sind P	SaP
Partikulär affirmativ	Einige S sind P	SiP
Universell negativ	Kein S ist P	SeP
Partikulär negativ	Einige S sind nicht P	SoP

Dabei steht S für Subjekt P für Prädikat und ist an heutigen grammatikalischen Vorstellungen orientiert; ARISTOTELES bezeichnet beides als Terme ($\breve{o}\rho o\varsigma$); genau wie das lateinische Wort *terminus* hat auch $\breve{o}\rho o\varsigma$ die Bedeutung *Grenze,* ist also ein rein syntaktischer Begriff, der nichts als die Stellung von S und P in der Aussage angibt. Die Verwendung von Buchstaben für Terme geht allerdings auf ARISTOTELES zurück und war eine ganz wesentliche und revolutionäre Neuerung (Man bedenke, daß in der Algebra Buchstaben als Symbole für Größen erst 1591 von FRANÇOIS VIEÈTE in seinem Buch *In artem analyticam isagoge* eingeführt wurden), insbesondere, da sie *keine* Abkürzungen waren wie S und P, sondern aufeinanderfolgende Buchstaben des Alphabets: A, B, Γ für die erste „Figur“ *(s.u.),* M, N, Ξ in der zweiten, und Π, P, Σ in der dritten.

Die Abkürzungen in der letzten Spalte gehen auf die Scholastiker zurück; sie leiten sich ab aus den Vokalen des lateinischen Worts **a**ff**i**rmo = *ich behaupte* für die beiden affirmativen Aussagen und von n**e**g**o** = *ich bestreite* für die beiden negativen. Wie wir in Paragraph 5 sehen werden, bilden diese Vokale den Grundstein einer ab dem 13. Jahrhundert sehr erfolgreichen mnemotechnischen Beschreibung der aristotelischen Logik.

In der *Analytica priora* sagt ARISTOTELES nichts über die Natur der Terme, aber in *De Interpretatione* unterscheidet er zwischen *universellen Termen* wie *Mensch,* die auf „viele“ Subjekte zutreffen und *singulären Termen* wie KALLIAS. Obwohl er einige Kapitel vorher einen nichtexistenten *Ziegenhirsch* diskutiert. geht er nicht ein auf unerfüllbare Terme; seine gesamte Syllogistik bezieht sich nur auf *universelle Terme.* Wie wir bald sehen werden, liegt darin ein wesentlicher Unterschied zur heutigen mathematischen Logik.

Daß ARISTOTELES auch singuläre Terme ausschließt, hat anscheinend pragmatische Gründe: In der *Analytica priora* teilt er die Dinge ein in mehrere Klassen, darunter der Klasse aller Dinge, die einerseits Teilbegriff, andererseits Oberbegriff von anderen Dingen sind. Für die Logik hält er nur diese Klasse für interessant.

Bei den Aussagen unterscheidet ARISTOTELES zwischen *universellen, partikulären* und *indefiniten.* Universelle Aussagen beginnen, wie obige Tabelle zeigt, mit *Alle* oder *Kein;* partikuläre Aussagen behaupten nur etwas über *einige* Subjekte mit einer bestimmten Eigenschaft. Eine indefinite Aussage wäre etwa *Vergnügen ist nicht gut;* solche Aussagen betrachtet er nicht in seiner Syllogistik.

Ein *Syllogismus* ist eine Schlußweise, die aus zwei Aussagen eine dritte folgert: die Definition in der *Analytica priora* ist praktisch äquivalent zur oben zitierten Definition aus der *Topik:*

> Schluß ist eine Rede, in welcher bei Setzung einiger Sachverhalte etwas anderes als das Gesetzte mit Notwendigkeit zutrifft aufgrund dessen, daß diese (gültig) sind. Mit „aufgrund dessen, daß diese sind“ meine ich: Deswegen tritt es ein, und mit „deswegen tritt es ein“: Es bedarf keines von außen herzugenommenen Begriffes, daß die Notwendigkeit zustandekommt.
>
> *An. pr.* I,1, $24^b 18$–23

Wir folgen der Terminologie der Scholastiker und bezeichnen die beiden ersten Aussagen als *praemissa maior* und *praemissa minor* oder kurz als Prämissen und die dritte, die laut ARISTOTELES ebenfalls eine Prämisse wäre, als *conclusio* oder Konklusion. Ist die Konklusion von der Form SxP mit $x \in \{a, i, e, o\}$, so macht die erste Prämisse eine Aussage über einen Zusammenhang zwischen P und ein weiteres Prädikat M, den sogenannten *Mittelbegriff,* und die zweite setzt M in Beziehung zu S. Ein wesentliches Ziel der aristotelischen Syllogistik bestand darin, zu vorgegebenen Termen S und P ein geeignetes M zu finden; Strategien dazu werden bei ARISTOTELES breit diskutiert.

Beispiel eines Syllogismus ist etwa

$$\begin{array}{ll} \text{Alle Vektorräume sind abelsche Gruppen} & MaP \\ \text{Alle } \mathbf{R}^n \text{ sind Vektorräume} & SaM \\ \hline \text{Alle } \mathbf{R}^n \text{ sind abelsche Gruppen} & SaP \end{array}$$

Als Standardbeispiel liest man häufig den Schluß

$$\begin{array}{ll} \text{Alle Menschen sind sterblich} & MaP \\ \text{SOKRATES ist ein Mensch} & SaM \\ \hline \text{SOKRATES ist sterblich} & SaP \end{array}$$

Im Sinne von ARISTOTELES ist dies wegen des singulären Terms SOKRATES kein Syllogismus, allerdings gab es schon unter seinen unmittelbaren Nachfolgern, den Peripatetikern, Schlüsse dieser Art, und spätestens in der Scholastik waren sie gang und gebe. Dort bildete sich nach einigen Diskussionen die Konvention heraus, Aussagen mit singulärem Subjekt als universell zu betrachten.

Natürlich ist nicht jeder Schluß, der die Form eines Syllogismus hat, richtig:

$$\begin{array}{ll} \text{Alle } \mathbf{R}^n \text{ sind abelsche Gruppen} & MaP \\ \text{Alle } \mathbf{R}^n \text{ sind Vektorräume} & MaS \\ \hline \text{Alle abelsche Gruppen sind Vektorräume} & SaP \end{array}$$

etwa ist sicherlich falsch. Dies liegt aber nicht nur daran, daß hier M in beiden Prämissen links steht, denn

$$\begin{array}{ll} \text{Alle } \mathbf{R}^n \text{ sind abelsche Gruppen} & MaP \\ \text{Einige } \mathbf{R}^n \text{ sind Vektorräume} & MiS \\ \hline \text{Einige abelsche Gruppen sind Vektorräume} & SiP \end{array}$$

ist unzweifelhaft richtig. M kann also durchaus an verschiedenen Stellen stehen. Schon bald nach dem Tod von ARISTOTELES wurden vier Figuren unterschieden:

$$\begin{array}{cccc} \textit{1. Figur} & \textit{2. Figur} & \textit{3. Figur} & \textit{4. Figur} \\ M - P & P - M & M - P & P - M \\ \searrow & \downarrow & \downarrow & \swarrow \\ \underline{S - M} & \underline{S - M} & \underline{M - S} & \underline{M - S} \\ S - P & S - P & S - P & S - P \end{array}$$

ARISTOTELES selbnst betrachtete nur *drei* Figuren; bei ihm gehörte jeder Schluß, bei dem der Mittelterm in einer Prämisse vorne und in der anderen hinten steht, zur ersten Figur; seine erste Figur war also die Vereinigungsmenge von erster und vierter Figur der späteren Terminologie; die Schlüsse der vierten Figur sind bei ihm (in etwas anderer Aufstellung) indirekte Schlüsse der ersten Figur.

Für jede dieser vier Figuren kann grundsätzlich in jeder der drei Zeilen jeder der vier Buchstaben a, i, e oder o eingesetzt werden; dies ergibt insgesamt $4 \cdot 4^3 = 256$ Kombinationen, von denen die meisten natürlich keine gültigen Schlußweisen sind.

Falls beispielsweise die Prämissen nur etwas aussagen über *einige* S beziehungsweise P, kann die Konklusion offensichtlich keine Aussage über *alle* S beziehungsweise P machen. Was bedeutet das konkret?

Die Aussage SaP, d.h. alle S sind P, sagt natürlich etwas aus über *alle* S, aber nicht über alle P: Im allgemeinen wird es auch P geben, die keine S sind. Entsprechend macht SiP, d.h. einige S sind P, nur eine Aussage über *einige* S und *einige* P. Wir sagen daher, das Subjekt von SaP sei *universell,* das von SiP aber genauso wie die Prädikate beider Aussagen *partikulär.*

Die negative Aussage SeP, d.h. kein S ist P, ist die Verneinung von SiP, d.h. einige S sind P, in der Subjekt und Prädikat beide partikulär sind. Verneinung macht daraus etwas universelles, und in der Tat macht SeP eine Aussage sowohl über alle S als auch über alle P: Wenn kein S gleichzeitig P ist, kann auch kein P gleichzeitig S sein, denn ein Gegenbeispiel wäre ja gerade ein S, das gleichzeitig P ist.

Entsprechend ist SoP, d.h. einige S sind nicht P, die Verneinung von SaP, d.h. alle S sind P, in der das Subjekt universell und das Prädikat partikulär ist; in SoP ist es also genau umgekehrt.

Insgesamt erhalten wir die folgende Tabelle:

Aussage	Subjekt	Prädikat
SaP	*universell*	*partikulär*
SeP	*universell*	*universell*
SiP	*partikulär*	*partikulär*
SoP	*partikulär*	*universell*

Offensichtlich kann aus partikulärem Wissen kein universelles folgen, wir haben also

Regel 1: Wenn S oder P in der Konklusion universell vorkommt, darf es in der Prämisse nicht partikulär sein.

Außerdem ist klar, daß wir keine Schlußfolgerungen ziehen können, wenn M in *beiden* Prämissen nur partikulär vorkommt, denn die „einigen M“ um die es jeweils geht, könnten in beiden Prämissen verschieden sein. Dies führt auf

Regel 2: M darf nicht in beiden Prämissen partikulär sein.

Also: *Aut semel aut iterum medium generaliter esto,* wie WILLIAM VON BASKERVILLE so richtig bemerkte. ADSON VON MELK hat diese Regel nicht beachtet, denn ist S der Term „Venantius und Berengar“, M der Term „Person mit schwarzen Fingern“ und P schließlich „Person, die die Substanz berührt hat“, so geht er aus von den beiden Prämissen *Jedes P ist M* und *Jedes S ist M*, zwei Aussagen von Typ a also, in denen der Mittelterm als Prädikat steht. Das Prädikat einer universell affirmativen Aussage aber ist partikulär.

Schließlich sind wegen der einfachen Struktur unserer Aussagen auch die folgenden drei Regeln klar:

Regel 3: Zwei affirmative Prämissen können keine negativen Konklusion ergeben.

Regel 4: Wenn mindestens eine Prämisse negativ ist, muß auch die Konklusion negativ sein.

Regel 5: Aus zwei negativen Prämissen läßt sich nichts folgern.

Diese letzte Regel dezimiert die 256 Möglichkeiten bereits ganz gewaltig: Für jede der vier Figuren sind $2 \times 2 \times 4$ Möglichkeiten ausgeschlossen, insgesamt also fällt bereits ein Viertel aller Kandidaten weg.

Mit ähnlichen Argumenten ließe sich noch weiter ausreduzieren; da man in einer Logikvorlesung aber zumindest auch ein bißchen Logikprogrammierung sehen sollte, wollen wir diese Arbeit einem Computer überlassen und verwenden dabei die Logikprogrammiersprache Prolog.

4. Logikprogrammierung in Prolog

Prolog entstand etwa um 1970; überspitzt formuliert könnte man als es als Grundparadigma der Sprache bezeichnen, daß ein Computer nicht dümmer ist als sein Programmierer. Letzerer hat daher nur noch die Aufgabe, alle Fakten und Regeln einzugeben, nicht mehr aber (wie in einer klassischen Programmiersprache) einen Lösungsalgorithmus. Beim derzeitigen Stand der Hardware und der Prolog-Implementierungen spricht vieles dafür, daß dabei die Fähigkeiten der Computer und die Qualität der Prolog-Implementierungen gewaltig überschätzt wurden.

Prolog war unter anderem die Grundlage des japanischen *fifth generation* Projekts, das die Kommunikation mit Computern in natürlicher Sprache ermöglichen sollte; die Sprache gilt gemeinhein als ein Hauptgrund für das Scheitern dieses Projekts.

Vor diesem Hintergrund ist Prolog derzeit für eine Logikvorlesung wahrscheinlich eher weniger relevant als ARISTOTELES (der, zumindest solange es um reine Logik geht, nicht mehr sonderlich relevant ist); die Sprache existiert allerdings immer noch, und da niemand weiß, was die Zukunft bringt, sollte man sie zumindest einmal in Aktion gesehen haben.

Das folgende ist daher nicht als Einführung in Prolog gedacht, sondern soll lediglich einen Eindruck davon vermitteln, wie ein Prolog-Programm aussieht. Wer Prolog systematisch lernen möchte, sei auf die einschlägige Literatur verwiesen; als Standardwerk gilt

W.F. CLOCKSIN, C.S. MELLISH: Programming in Prolog, *Springer,* ^{3}1987

Als Lehrbuch der Logik, das Prolog systematisch benutzt und auch einführt, kann man

P. GIBBINS: Logic with Prolog, *Oxford* 1988

konsultieren; man sollte allerdings beachten, daß dessen Autor inzwischen prologfreie Programme zum besseren Verständnis logischer Probleme vermarktet.

Wie bei Programmiersprachen (vor allem den nicht gebräuchlichen) üblich, gibt es mehrere nicht miteinander kompatible Implementierungen sowie auch verschiedene Standards; die folgenden Beispiele sind in SWI-Prolog programmiert, einer frei erhältlichen Implementierung der Arbeitsgruppe für **S**ozial**w**wissenschaftliche **I**nformatik an der psychologischen Fakultät der Universität Amsterdam. Sie ist z.B. Teil von SuSE Linux und steht auch für verschiedene mikroweiche Betriebssysteme zur Verfügung; ihre homepage ist

`http://swi.psy.uva.nl/projects/SWI-Prolog/`

und unter

`http://swi.psy.uva.nl/projects/SWI-Prolog/download.html`

sind die verschiedenen Versionen zu finden.

SWI-Prolog orientiert sich vor allen am sogenannten Edinburgh-Prolog und an ISO-Prolog, wobei die Kompatibilitäten teilweise durch Flags gesteuert werden können.

Nach diesen Vorbemerkungen wollen wir damit beginnen, das Problem in Prolog zu formulieren – nach der Philosophie von Prolog ist schließlich genau das unsere Aufgabe; um die Lösung kümmert sich der Computer. Bei nur 256 möglichen Fällen sollte das unabhängig von der Qualität der Programmiersprache kein Problem für ihn sein.

Als erstes führen wir die vier Aussagetypen SaP, SeP, SiP und SoP ein. Konstanten sowohl für Subjekte wie auch für Prädikate in Prolog sind Zeichenfolgen, die mit einem Kleinbuchstaben beginnen; wir definieren daher die Aussagetypen als `a`, `e`, `i` und `o` und führen ein Prädikat `aussage` ein. Die Deklaration, daß `a`, `e`, `i`, `o` Aussagen sind hat die Form


```
aussage(a).
aussage(e).
aussage(i).
aussage(o).
```

Man beachte, daß jeder dieser Sätze mit einem Punkt endet.

Als nächstes muß deklariert werden, daß SaP und SiP affirmativ sind, während SeP und SoP negativ sind; mit den zwei neuen Prädikaten `affirmativ` und `negativ` ist das kein Problem:

```
affirmativ(a).
affirmativ(i).
negativ(e).
negativ(o).
```

Weiter spielt eine wesentliche Rolle, ob das Subjekt beziehungsweise Prädikat einer Aussage universell oder partikulär ist; dazu definieren wir die beiden zweistelligen Prädikate `universell(x, y)` und `partikulaer(x, y)`, bei denen `x` die Werte `subjekt` und `praedikat` annehmen kann, während `y` für eine Aussage steht. Die Interpretation von `universell(x, y)` soll natürlich sein, daß das `x` von `y` universell ist.

```
universell(subjekt, a).
universell(_, e).
universell(praedikat, o).

partikulaer(praedikat, a).
partikulaer(_, i).
partikulaer(subjekt, o).
```

Im Fall der Aussage `e`, bei der sowohl das Subjekt als auch das Prädikat universell sind, steht hier für `x` der Unterstreichungsstrich `_`; diese *anonyme Variable* bedeutet, daß die Aussage `universell(x, e)` wahr ist, egal was man für `x` einsetzt.

Die vier Figuren kodieren wir einfach durch ihre Zahlenwerte:

```
figur(1).
figur(2).
figur(3).
figur(4).
```

Für jede Figur müssen wir wissen, wo der Mittelterm im der prämissa maior und der prämissa minor steckt; dazu dient das dreistellige Prädikar mitte, wobei wir für die zweite und dritte Figur, bei der der Mittelterm beidesmal hinten beziehungsweise beides mal vorne steht, wieder die anonyme Variable verwenden können:

```
mitte(1, maior, subjekt).
mitte(1, minor, praedikat).

mitte(2, _, praedikat).
mitte(3, _, subjekt).

mitte(4, maior, praedikat).
mitte(4, minor, subjekt).
```

Wir müssen auch wissen, wo das Subjekt und das Prädikat der *conclusio* in den beiden Prämissen stehen. Da diese genau dort stehen, wo der Mittelterm nicht steht, reicht es wenn wir wissen, wie die beiden Terme subjekt und praedikat durcheinander ersetzt werden können; dazu dient die Festsetzung

```
anderer_term(subjekt, praedikat).
anderer_term(praedikat, subjekt).
```

Das Unterstreichungszeichen im Namen dieses Prädikats hat natürlich nichts mit der anonymen Variablen zu tun, sondern dient einfach der besseren Lesbarkeit des Namens; ab der zweiten Stelle darf es genau wie ein Buchstabe verwendet werden.

Nach diesen Vorbereitungen können wir damit beginnen zu sagen, was ein (gültiger) Syllogismus sein soll. Diesen beschreiben wir durch ein Quadrupel (F, x, y, z) aus einer Figur F und drei Aussagen x, y, z, den beiden Prämissen x, y und der Konklusion z. Dazu benötigen wir Variablen, die von Prolog auf geeignete Werte gesetzt werden sollen.

Variablen sind in Prolog Zeichenketten die mit einem Großbuchstaben beginnen; wir betrachten daher vier Variablen F, X, Y und Z. Als erstes legen wir die Form eines Syllogismus fest:

```
syllogismus(F, S) :- figur(F),
   aussage(X), aussage(Y), aussage(Z),
   legal(F, X, Y, Z).
```


Das bedeutet folgendes: Im Gegensatz zu den bisherigen Prädikaten, bei denen wir explizit angegeben hatten, für welche Konstanten sie erfüllt sind, geben wir hier nur Regeln an, anhand derer Prolog selbständig entscheiden soll, wann das Prädikat erfüllt ist und wann nicht. Dazu werden die Prädikate auf der rechten Seite von links nach rechts abgearbeitet; sobald eines falsch oder unerfüllbar ist, wird die Auswertung der rechten Seite abgebrochen und nach einer eventuell verhandenen neuen Regel gesucht, mit der sich das Prädikat erfüllen läßt. Falls alle Aussagen rechts wahr sind, soll auch die Aussage links wahr sein.

Trifft Prolog in einem Prädikat statt auf eine Konstante auf eine (noch nicht zugewiesene) Variable, probiert es dafür so lange die vorhandenen Konstanten durch, bis eine wahre Aussage entsteht; sodann wird der Variablen die entsprechende Konstante zugewiesen. Falls sich keine Konstante finden läßt, für die eine wahre Aussage entsteht, wird die Aussage als falsch gewertet.

Das Prädikat syllogismus(F, X, Y, Z) ist also erfüllt, wenn F eine Figur ist, d.h. eine der Zahlen von eins bis vier, und wenn X, Y und Z Aussagen sind, also jeweils einen der vier Werte a, e, i oder o haben, und wenn das Prädikat legal(F, X, Y, Z) erfüllt ist; was letzteres bedeutet, müssen wir Prolog erst noch erklären.

Wir beginnen, da sich das einfach programmieren läßt, mit der zweiten Regel: *Der Mittelterm darf nicht in beiden Prämissen partikulär sein.*

```
legal(F, X, Y, Z) :-
   mitte(F, maior, U), partikulaer(U, X),
   mitte(F, minor, V), partikulaer(V, Y), !, fail.
```

Zumindest die ersten vier Terme rechts sollten einigermaßen klar sein:

mitte(F, maior, U) kann bei gegebenem F nur auf eine Weise befriedigt werden, nämlich indem U auf subjekt oder praedikat gesetzt wird, je nachdem wo der Mittelterm in der ersten Prämisse bei der jeweiligen Figur steht. Das zweite Prädikat partikulaer(U, X) ist dann nur dadurch zu erfüllen, daß das Subjekt beziehungsweise Prädikat der ersten Aussage X partikulär ist, wenn also der Mittelterm in der ersten Prämisse partikulär ist. Genauso sind die nächsten beiden Prädikate genau dann erfüllt, wenn der Mittelterm in der *zweiten* Prämisse partikulär ist. Insgesamt sind also die ersten vier Terme genau dann erfüllt, wenn der Mittelterm in beiden Prämissen partikulär ist und somit der Syllogismus nach Regel 2 *illegal* ist.

Da wir gerade dabei sind, *legale* Syllogismen zu definieren, darf das Prädikat nicht erfüllt werden, wenn wir an dieser Stelle angelangt sind. Dazu dient das `fail` am Ende: Es liefert immer den Wert falsch.

Das reicht allerdings nicht, denn wenn `legal(F, X, Y, Z)` nach dieser Regel nicht bewiesen werden kann, versucht es Prolog normalerweise einfach mit der nächsten. Dies wird durch das Ausrufungszeichen vor dem `fail` verhindert, den sogenannten `cut`-Operator. Die Kombination aus `cut` und `fail` sorgt also dafür, daß der Nachweis von `legal(F, X, Y, Z)` endgültig gescheitert ist, wenn die ersten vier Bedingungen erfüllt sind.

Falls nicht alle der ersten vier Bedingungen erfüllt sind, bricht Prolog mit dieser Regel bereits bei der ersten nichterfüllten Bedingung ab und sieht daher den `cut`-Operator nicht; in diesem Fall wird weiter versucht `legal(F, X, Y, Z)` nach einer anderen Regel zu befriedigen.

Die erste Regel wird völlig analog implementiert:

```
legal(F, X, Y, Z) :-
  mitte(F, maior, U), anderer_term(U, V),
  partikulaer(V, X), universell(praedikat, Z),
  !, fail.
```

Zunächst wird also `U` auf die Position des Mittelterms gesetzt, dann erhält `V` denjenigen der beiden Werte `subjekt` und `praedikat`, der nicht von `U` besetzt ist; an dieser Stelle steht in der ersten Prämisse also der Term P. Dann überprüft `partikulaer(V, X)`, ob dieser Term partikulär vorkommt; falls ja, fragt `universell(praedikat, Z)`, ob P in der Konklusion universell auftritt. Ist das der Fall, sind wir in einer der beiden von der ersten Regel verbotenen Situationen und beenden die Verifikation mit der `cut-fail`-Konstruktion.

Analog wird mit der zweiten Prämisse verfahren, in der das Subjekt der Konklusion steht:


```
legal(F, X, Y, Z) :-
   mitte(F, minor, U) anderer_term(U, V)
   partikulaer(V, Y), universell(subjekt, Z),
   !, fail.
```

Die weiteren Regeln sind einfach zu implementieren:

Nach der dritten Regel darf aus zwei affirmativen Prämissen keine negative Konklusion folgen, d.h.

```
legal(F, X, Y, Z) :-
   affirmativ(X), affirmativ(Y),
   negativ(Z), !, fail.
```

Nach der vierten darf die Konklusion nicht affirmativ sein, wenn eine der Prämissen negativ ist; wir machen daraus für jede der beiden Prämissen eine Regel:

```
legal(F, X, Y, Z) :-
   negativ(X), affirmativ(Z), !, fail.

legal(F, X, Y, Z) :-
   negativ(Y), affirmativ(Z), !, fail.
```

Schließlich gibt es nach der fünften Regel keinen gültigen Syllogismus mit zwei negativen Prämissen:

```
legal(F, X, Y, Z) :-
  negativ(X), negativ(Y), !, fail.
```

Damit ist dafür gesorgt, daß das Prädikat `legal(F, X, Y, Z)` nicht erfüllt sein kann, wenn eine der fünf Regeln verletzt ist. Wir haben aber noch nicht dafür gesorgt, daß es überhaupt erfüllt werden kann. Das ist jetzt aber ganz einfach: Wenn keine der bisherigen Prolog-Anweisungen zu einem `cut` und `fail` geführt hat, sind alle Regeln erfüllt, es gibt also keine weiteren Bedingungen mehr und wir können einfach setzen

```
legal(F, X, Y, Z) :- true.
```

Dabei steht `true` natürlich für ein Prädikat, das immer wahr ist.

Damit haben wir in Prolog formuliert, was ein Syllogismus ist; wie es weitergeht, hängt etwas von der Implementierung ab.

Im hier verwendeten SWI-Prolog ist es am besten, diese Anweisungen in einer Datei zusammenzufassen; am einfachsten ist es, wenn deren Namen mit einem Kleinbuchstaben beginnt und die Endung „`.pl`“ hat. Wählen wir also den Dateinamen `syllogismen.pl`; nachdem diese Datei erstellt und gefüllt ist, rufen wir Prolog auf; unter Linux ist das der Befehl `pl`:

```
seiler@kodaira:~/Logik > pl
Welcome to SWI-Prolog (Version 2.8.6)
Copyright (c) 1993-1997 University of Amsterdam.
All rights reserved.
For help, use ?- help(Topic). or ?- apropos(Word).
1 ?-
```

Der Befehl `consult` macht Prolog mit den in einer Datei gesammelten Regeln vertraut; wir geben also ein

```
1 ?- consult(syllogismen).
```

und erhalten als Antwort zunächst einmal eine Reihe von hier nicht abgedruckten Warnungen (die man mit geeigneten Flags wohl wegdefinieren könnte) und dann die Meldung

```
syllogismen compiled, 0.01 sec, 0 bytes.
Yes
2 ?-
```

Jetzt können wir Fragen stellen, die auf die Definitionen in `syllogismen.pl` Bezug nehmen; da wir Syllogismen finden wollen, fragen wir mit vier Variablen

```
2 ?- syllogismus(F, X, Y, Z).
F = 1
X = a
Y = a
Z = a
```

Das ist in der Tat ein gültiger Syllogismus der ersten Figur, allerdings leider einer, den wir schon kennen: Aus MaP und SaM folgt SaP.

Um auch noch andere Syllogismen kennenzulernen, gibt es im wesentlichen zwei Wege: Wir können Prolog auffordern, uns noch weitere

Lösungen des angerfragten Prädikats zu nennen, indem wir einen *Strichpunkt* eingeben: Genau wie das Komma in den oben formulierten Regeln die Rolle eines logischen „und“ übernimmt, ist der Strichpunkt das logische „oder“ (das wir auch in den obigen Regeln hätten verwenden können) und liefert hier die nächste Antwort:

```
Z = a ;
F = 1
X = a
Y = a
Z = i
```

(In manchen Prolog-Implementierungen muß man hier auch eine Funktionstaste drücken; dort wird der Strichpunkt nur in Regeln als „oder“ interpretiert.)

Auf diese Weise könnten wir beliebig weitermachen; besser wäre allerdings, wenn wir Prolog dazu bringen könnten, uns alle gültigen Syllogismen am Stück zu nennen. Deshalb geben wir nun keinen Strichpunkt mehr ein, sondern nur einen Zeilenwechsel, und gehen dann mit dem `edit`-Kommando noch einmal in die Datei:

```
Z = i
Yes
3 ?- edit(syllogismen).
```

Nun erscheint `syllogismen.pl` im voreingestellten Systemeditor, und wir fügen die folgende Anweisung hinten ein:

```
?- syllogismus(F, X, Y, Z),
   writef(Figur ), write(F), writef(: ),
   write(X), writef(-), write(Y), writef(-),
   write(Z), nl, fail.
```

Man beachte, daß das `?-` hier im Editor natürlich nicht von Prolog als Prompt vorgegeben wurde, sondern als Operator eingetippt werden mußte; es sagt Prolog, daß wir nun *nicht* der üblichen Praxis folgen, wonach in der zu konsultierenden Datei nur Fakten stehen, sondern daß wir dort eine der Fragen stellen, wie sie eigentlich erst für die interaktive Eingabe vorgesehen ist – und in der Tat hätten wir diese vier Zeilen (ohne den Operator `?-`) auch einfach an einem `?-`-Prompt eintippen können mit exakt dem gleichen Ergebnis:

```
Figur 1: a-a-a
Figur 1: a-a-i
Figur 1: a-i-i
Figur 1: e-a-e
Figur 1: e-a-o
Figur 1: e-i-o
Figur 2: a-e-e
Figur 2: a-e-o
Figur 2: a-o-o
Figur 2: e-a-e
Figur 2: e-a-o
Figur 2: e-i-o
Figur 3: a-a-i
Figur 3: a-i-i
Figur 3: e-a-o
Figur 3: e-i-o
Figur 3: i-a-i
Figur 3: o-a-o
Figur 4: a-a-i
Figur 4: a-e-e
Figur 4: a-e-o
Figur 4: e-a-o
Figur 4: e-i-o
Figur 4: i-a-i
[WARNING: (/home/seiler/Logik/syllogismen.pl:68)
        Directive failed:
syllogismus(_G389, _G390, _G391, _G392),
writef([70, 105, 103, 117, 114, 32]),
write(_G389), writef([58, 32]), write(_G390),
writef([45]), write(_G391), writef([45]),
write(_G392), nl, fail]
syllogismen compiled, 0.00 sec, 4,532 bytes.

Yes
```

Wie kommt das zustande?

Die Prädikate `write`, `writef` und `nl` sind neu, aber einfach zu verstehen: Sie liefern *immer* den Wert wahr; interessant ist nur ihr *Nebeneffekt,* der darin besteht, das Argument beziehungsweise einen Zeilenwechsel *(new line)* auszugeben. Zeichenketten werden in Prolog (meistens) als Listen von ASCII-Werten behandelt; im Gegensatz zu `write` sorgt `writef`, die Anweisung für formattierte Ausgabe, dafür, daß sie als verständlicher Text auf dem Bildschirm erscheinen.

Interessanter ist das `fail` am Ende: Genau wie `true` *immer* erfüllt ist, ist `fail` *nie* erfüllt; da ein Ziel nur erreicht wird, wenn alle durch Komma getrennte Teilziele auf der rechten Seite erfüllt werden können, haben wir nun also ein Ziel, bei dem von vornherein klar ist, daß es nicht erfüllbar ist.

Nun ist aber aus gutem Grund festgelegt, daß Prolog *immer* seine Teilziele strikt von links nach rechts abarbeitet; sobald das Prädikat `syllogismus(F, X, Y, Z)` erfüllt ist, werden also alle `write`-Anweisungen ausgeführt, und erst nach dem `nl` ist klar, daß das Ziel so nicht erreicht werden kann. Also versucht Prolog, das Prädikat mit anderen Variablenwerten zu befriedigen, und so weiter, bis es dafür keine weitere Möglichkeit mehr gibt. Durch diesen Trick wird Prolog also dazu veranlaßt, alle Quadrupel (`F`, `X`, `Y`, `Z`) zu bestimmen, für die das Prädikat `syllogismus(F, X, Y, Z)` erfüllt ist. Durch das `fail` am Ende ist Prolog nun allerdings der Auffassung, es sei ihm nicht gelungen, unsere Anfrage zu erfüllen; SWI-Prolog gibt deshalb die etwas seltsam aussehende Warnung aus, andere Systeme antworten einfach mit `No`. (`_G389` usw. sind interne Objekte, die Prolog im Laufe seiner Verifikationsversuche erzeugt.)

Mit diesem Ergebnis kehren wir von Prolog zurück zur klassischen Logik und halten fest, daß es zu jeder Figur genau sechs Syllogismen gibt, die den oben aufgestellten fünf Regeln entsprechen. Wir werden in Kürze sehen, daß diese auch allesamt gültig sind.

5. Mnemotechnische Regeln

Für den klassischen Logiker war es wesentlich, diese 24 Syllogismen zu kennen, allerdings war es für ihn wohl genauso schwierig wie für einen heutigen Studenten, sich für jede Figur eine Kombination aus drei Vokalen zu merken. Deshalb kam man im Mittelalter auf die Idee, den Syllogismen Namen zu geben, deren erste drei Vokale gleich den oben angegebenen Buchstaben sind. Der erste solche Ansatz war wohl das bereits eingangs erwähnte relativ dünne Buch *Introductiones in Logicam,* das der Engländer WILLIAM VON SHERWOOD zu Beginn des dreizehnten

Jahrhunderts veröffentlichte; bekannter wurde das ebenfalls erwähnte ausführlichere Lehrbuch *Summulae Logicales* von PETRUS HISPANUS, dem späteren Papst JOHANNES XXI Es enthält mehr und bessere mnemotechnische Regeln als die *Introductiones* und setzte die Standards für die Logik des Mittelalters. Beide Bücher sind noch heute in verschiedenen Ausgaben (auf Latein) erhältlich; die *Introductiones* auch als zweisprachige Aussage mit deutscher Übersetzung (herausgegeben von HARMUT BRANDS und Christoph Kann, *Felix Meiner Verlag,* 1995) und die *Summulae* in englischer Übersetzung (von FRANCIS P. DINNEEN SJ) unter dem Titel PETER OF SPAIN: Language in Dispute, *John Benjamins Publishing Company,* 1990.

In beiden Büchern wird noch, wie bei ARISTOTELES, von nur drei Figuren ausgegangen, so daß die Syllogismen der vierten Figur eine etwas andere Form und damit auch andere Namen haben; erst später haben sich vier Figuren durchgesetzt und dazu die folgenden Namen:

1. Figur	**2. Figur**	**3. Figur**	**4. Figur**
barbara	*camestres*	*(darapti)*	*(bamalip)*
(barbari)	*(camestros)*	*datisti*	*calemes*
celarent	*baroco*	*(felapton)*	*(calemos)*
(celaront)	*cesare*	*ferison*	*(fesapo)*
darii	*(cesaro)*	*disamis*	*fresison*
ferio	*festino*	*bocardo*	*dimatis*

Einige der Namen sind eingeklammert: Dabei handelt es sich um „überflüssige" Syllogismen. In der ersten Figur beispielsweise ist *barbari* eingeklammert: dieser Schluß hat die Form

$$\begin{array}{ll} \text{Alle } M \text{ sind } P & MaP \\ \text{Alle } S \text{ sind } M & SaM \\ \hline \text{Einige } S \text{ sind } P & SiP \end{array}$$

Also zum Beispiel

$$\begin{array}{l} \text{Alle Zahlen mit Quersumme drei sind Dreierzahlen} \\ \text{Alle geraden zweistelligen Primzahlen haben Quersumme drei} \\ \hline \text{Einige gerade zweistellige Primzahlen sind Dreierzahlen ???} \end{array}$$

Diese Konklusion ist sicherlich falsch: Da es keine gerade zweistellige Primzahl gibt, kann es erst recht keine geben, die durch drei teilbar ist. Trotzdem sind beide Prämissen richtig, die *praemissa minor* allerdings nur auf Grund der technischen Spitzfindigkeit, daß man über nicht existente Objekte wie gerade zweistellige Primzahlen behaupten kann, was man will.

Solche Spitzfindigkeiten macht ARISTOTELES, wie wir bereits gesehen haben, nicht mit: Ein Term ist für ihn Eigenschaft von wirklichen Dingen; *gerade zweistellige Primzahl* betrachtet er also nicht als zulässigen Term, und hierin folgen ihm auch die Scholastiker. Im Gegensatz zu den Gepflogenheiten der heutigen Mathematik folgt also in der Syllogistik aus *Alle S sind P* immer auch *Einige S sind P;* man darf aber für S und P nur erfüllbare Begriffe einsetzen.

Unter dieser Voraussetzung ist die Schlußweise *barbari* unzweifelhaft richtig, sie ist aber schwächer als nötig: Schließlich können wir sogar folgern, daß *alle S* auch P sein müssen, und das ist *barbara.* Genauso ist *celaront*

$$\begin{array}{ll} \text{Kein } M \text{ ist } P & MaP \\ \text{Alle } S \text{ sind } M & SeM \\ \hline \text{Einige } S \text{ sind nicht } P & SoP \end{array}$$

nur eine abgeschwächte Form von *celarent,* der aus denselben Prämissen ableitet, daß *kein S* gleichzeitig P sein kann.

Entsprechend überlegt man sich leicht, daß *camestros* eine Abschwächung von *camestres, cesaro* eine von *cesare* und *calemos* eine von *calemes* ist. Etwas anders ist die Situation bei *bamalip:*

$$\begin{array}{ll} \text{Alle } P \text{ sind } M & PaM \\ \text{Alle } M \text{ sind } S & MaS \\ \hline \text{Einige } S \text{ sind } P & SiP \end{array}$$

Hier läßt sich der Schluß ganz sicher nicht verschärfen zu

$$\text{Alle } S \text{ sind } P \qquad SaP$$

Der entsprechende Syllogismus würde in der Konklusion eine universelle Aussage über S machen, obwohl S in der *prämissa minor* nur partikulär vorkommt. Das ist nach den Regeln aus dem letzten Paragraphen aus gutem Grund verboten; man betrachte nur etwa das Gegenbeispiel

Alle Hunderterzahlen sind Zehnerzahlen	PaM
Alle Zehnerzahlen sind zusammengesetzt	MaS
Alle zusammengesetzten Zahlen sind Hunderterzahlen	SiP

Trotzdem können wir die Schlußweise verschärfen: Da im Sinne der Syllogistig *Einige P sind M* schwächer ist als *Alle P sind M*, ist *bamalip* eine Abschwächung von *dimatis,* der dieselbe Konklusion aus derselben *praemissa minor* und einer abgeschwächten *praemissa maior* zieht.

Im gleichen Sinne ist *darapti* eine Abschwächung von *disamis, felapton* folgt aus *ferison* und *fesapo* aus *fresison.*

Aristoteles betrachtet die gerade diskutierten Abschwächungen überhaupt nicht und kommt daher nur auf fünfzehn Syllogismen; erst die Scholastik führt auch *abgeschwächte Syllogismen* ein. Wenn wir diese hintanstellen und den Rest alphabetisch ordnen, erhalten wir die neue Tabelle

1. Figur	**2. Figur**	**3. Figur**	**4. Figur**
barbara	*baroco*	*bocardo*	*calemes*
celarent	*camestres*	*datisti*	*dimatis*
darii	*cesare*	*disamis*	*fresison*
ferio	*festino*	*ferison*	
(barbari)	*(camestros)*	*(darapti)*	*(bamalip)*
(celaront)	*(cesaro)*	*(felapton)*	*(calemos)*
			(fesapo)

Bei William von Sherwood wie auch bei Petrus Hispanus wird dies (mit etwas anderen Namen) zusammengefaßt zu der Merkregel

Barbara celerant darii ferio (baralipton)
Celantes dabites (fapesmo) frisesomorum;
Cesare campestres festino baroco; (darapti)
(Felapton) disamis datisti bocardo ferison.

Eine spätere Version, die zwischen erster und vierter Figur unterscheidet und überhaupt die Figuren klarer betont ist

Barbara celerant *primae* darii ferio*que.*
Cesare camestres festino baroco *secundae.*
Tertia grande sonans recitat (Darapti) (felapton)
Disamis datisti bocordo ferison. *Quartae*
sunt (Bamalip) calemes dimatis (fesapo) fresison.

Beide Verse enthalten auch einen Teil der abgeschwächten Syllogismen, wobei deren Auswahl wohl ausschließlich davon abhängt, daß ein leicht merkbarer Vers entsteht.

6. Beweis der Syllogismen

Trotz all der schönen Merkregeln wissen wir bislang noch nicht, ob wirklich alle Syllogismen aus unserer Tabelle gültig sind: Schließlich haben wir bislang nur einige offensichtlich ungültigen eliminiert.

Aristoteles geht im weiteren so vor: Er bezeichnet die vier nicht überflüssigen Syllogismen der (heutigen) ersten Figur, als *vollkommen,* den Rest als unvollkommen. Die vollkommenen Syllogismen hält er für unmittelbar einsichtig; schaut man sie sich genauer an, fällt das nicht schwer:

Barbara	Alle M sind P	MaP
	Alle S sind M	SaM
	Alle S sind P	SaP
Celarent	Kein M ist P	MeP
	Alle S sind M	SaM
	Kein S ist P	SeP
Darii	Alle M sind P	MaP
	Einige S sind M	SiM
	Einige S sind P	SiP

Ferio	Kein M ist P	MeP
	Einige S sind M	SiM
	Nicht alle S sind P	SoP

Die restlichen Syllogismen, die unvollkommenen, werden jeweils auf einen dieser vier zurückgeführt. (ARISTOTELES redet hier nicht von einem *Beweis,* denn Beweise sind für ihn etwas, wozu man die Syllogismen benutzt. Schreibt man aber den Satz *Wenn darii, dann datisti* aus, entsteht etwas, was viel zu kompliziert ist als daß es auf Syllogismen reduzierbar wäre. Trotzdem ist

Datisti	Alle M sind P	MaP
	Einige M sind S	MiS
	Einige S sind P	SiP

auf *darii* reduzierbar, denn wenn einige M gleichzeitig S sind, müssen auch einige S, nämlich genau die, von denen gerade die Rede war, M sein, so daß wir MiS durch SiM ersetzen können, um dann mit *darii* die Konklusion SiP zu folgern.

Für einen Scholastiker wäre das ohne jedes Nachdenken sofort klar gewesen: Der Anfangsbuchstabe *d* von *datisti* sagt ihm, daß der Schluß auf *darii* zurückgeführt werden kann, und das *s* hinter dem *i* der zweiten Silbe sagt ihm, daß er dazu Subjekt und Prädikat der zweiten Prämisse vertauschen muß.

Insgesamt sind die Regeln folgende:

- Jeder Syllogismus wird auf den vollkommenen Syllogismus zurückgeführt, der mit demselben Buchstaben beginnt.
- Steht nach dem Konsonant einer der ersten drei Silben ein s wie *simpliciter,* so müssen in der entsprechenden Zeile des Syllogismus Subjekt und Prädikat miteinander vertauscht werden.
- Steht nach dem Konsonant einer der ersten drei Silben ein p wie *per accidens,* so müssen in der entsprechenden Zeile des Syllogismus ebenfalls Subjekt und Prädikat miteinander vertauscht werden; zusätzlich werden dort noch die Quantitäten verändert: a wird zu i und umgekehrt. Dieser Konsonant tritt aus offensichtlichen Gründen nur in abgeschwächten Syllogismen auf.

- Steht irgendwo im Namen ein *m* wie *mutare,* muß die Reihenfolge der Prämissen vertauscht werden.
- Ein c wie *per contradictionem* besagt, daß die Zurückführung auf den vollkommenen Syllogismus erfolgt, indem man sein Gegenteil *ad absurdum* führt.
- Die restlichen Konsonanten haben keine Bedeutung.

Den Effekt eines *s* haben wir im vorigen Beispiel gesehen; Inspektion der Syllogismentabelle zeigt, daß s immer nur hinter *i* oder *e* steht, und da ist die Vertauschung von Subjekt und Prädikat in der Tat legal: Für SiP haben wir das im Falle von *datisti* gesehen, und SeP ist die Aussage *Kein S ist P*, die natürlich äquivalent ist zu PeS, d.h. *Kein P ist S*.

Falls *p* hinter einem der ersten beiden Vokale steht (tatsächlich immer hinter dem zweiten), ist dieser stets ein *a*, das wir der Regel gemäß zu einem *i* machen müssen, d.h. wir schwächen eine Prämisse SaP ab zu SiP. An der Richtigkeit der abgeschwächten Prämisse ändern sich nichts, wenn wir Subjekt und Prädikat vertauschen; ist also der neue Syllogismus zulässig, so ist es erst recht auch der ursprüngliche.

Steht *p* hinter dem dritten Vokal, kann es sich nur um *bamalip* handeln; der Vokal ist also ein *i.* Durch Anwendung der Regel vertauschen wir dort Subjekt und Prädikat, was eine Äquivanlenzumformung ist, und ersetzen dann die partikuläre Konklusion durch eine universelle. Wenn diese gilt, ist natürlich erst recht die partikuläre richtig.

Damit ist auch *p* immer eine legale Operation.

Als Beispiel betrachten wir

Fesapo	Kein P ist M	PeM
	Alle M sind S	MaS
	Einige S sind nicht P	SoP

Hinter dem ersten Vokal steht ein *s*; wir müssen daher in der *praemissa maior* Subjekt und Prädikat vertauschen, wodurch PeM in MeP übergeführt wird.

Hinter dem zweiten Vokal steht ein *p;* in der *praemissa minor* müssen also nicht nur Subjekt und Prädikat vertauscht werden, sondern die a-Aussage in eine i-Aussage umgewandelt werden: Aus MaS wird SiM.

Hinter dem letzten Vokal steht kein Konsonant mehr; die Konklusion wird also einfach übernommen und wir erhalten

$$\begin{array}{lll} \textit{Ferio} & \text{Kein } M \text{ ist } P & MeP \\ & \text{Einige } S \text{ sind } M & SiM \\ \cline{2-3} & \text{Einige } S \text{ sind nicht } P & SoP \end{array}$$

Damit haben wir einen vollkommenen Syllogismus erreicht; da dieser zulässig ist, ist es auch *fesapo.*

Bei der Vertauschung der Prämissen bleibt natürlich jeder gültige Schluss gültig; als Beispiel, wie diese Vertauschung nützlich sein kann, betrachten wir

$$\begin{array}{lll} \textit{Camestres} & \text{Alle } P \text{ sind } M & PaM \\ & \text{Kein } S \text{ ist } M & SeM \\ \cline{2-3} & \text{Kein } S \text{ ist } P & SeP \end{array}$$

Das *s* in der zweiten Silbe besagt, daß wir in der *praemissa minor* Subjekt und Prädikat vertauschen müssen

$$\begin{array}{lll} \textit{Calemes} & \text{Alle } P \text{ sind } M & PaM \\ & \text{Kein } M \text{ ist } S & MeS \\ \cline{2-3} & \text{Kein } P \text{ ist } S & PeS \end{array}$$

Das *s* in der dritten Silbe verlangt dasselbe für die Konklusion:

$$\begin{array}{ll} \text{Alle } P \text{ sind } M & PaM \\ \text{Kein } M \text{ ist } S & MeS \\ \hline \text{Kein } P \text{ ist } S & PeS \end{array}$$

Schließlich sagt und das *m,* daß wir die beiden Prämissen vertauschen müssen; um die gewohnten Buchstaben zu sehen, empfiehlt es sich dabei, zusätzlich auch noch die beiden Buchstaben S und P zu vertauschen. Dies muß natürlich sowohl in den beiden Prämissen als auch in der Konklusion gemacht werden; ansonsten verlieren wir die Gültigkeit des Syllogismus.

Im vorliegenden Fall erhalten wir

$$\begin{array}{lll} \textit{Celarent} & \text{Kein } M \text{ ist } P & MeP \\ & \text{Alle } S \text{ sind } M & SaM \\ \cline{2-3} & \text{Kein } S \text{ ist } P & SeP \end{array}$$

Bleibt noch der Fall, daß ein *c* hinter einem Vokal steht. Das kommt in der Tabelle genau zweimal vor, nämlich bei *baroco* und *bocardo.* In beiden Fällen ist also die Konklusion *SoP,* d.h. *Einige S sind nicht* P. Wir nehmen an, dies sei falsch. Dann sind alle S gleichzeitig P. Außerdem besagt die *praemissa maior* von *baroco,* daß alle P gleichzeitig M ist; nach *barbara* folgt *alle* S sind M, also das genaue Gegenteil der *praemissa minor,* wonach einige S *nicht* M sind.

Entsprechend besagt die *praemissa minor* von *bocardo,* daß alle M gleichzeitig S sind; nach *barbara* ist also jedes M ein P, nach der *praemissa maior* aber sind einige M nicht P. In beiden Fällen erhalten wir also einen Widerspruch, wenn wir von der Falschheit der Konklusion ausgehen. Somit muß diese richtig sein.

Damit wissen wir, daß die Konsonanten *s, p, m, c* stets zu legalen Umformungen führen, d.h. eine Schlußweise wird ersetzt durch eine stärkere, aus der die ursprüngliche folgt. Wir müssen nun nur noch nachprüfen, daß die Anwendung dieser Umformungen stets auf einen vollkommenen Syllogismus führt.

Diese rein mechanische Nachprüfung ist wieder etwas, was wir besser einer Maschine überlassen: Wenn wir die Figur kennen, können wir den Namen des Syllogismus von links nach rechts abarbeiten und dabei einerseits anhand der Vokale die Form des Syllogismus bestimmen, andererseits anhand der Konsonanten die Umformungen, durch die man zu einem vollkommenen Syllogismus kommt. Danach muß nur noch überprüft werden, ob diese Umformungen tatsächlich zu einem der vier vollkommenen Syllogismen geführt haben.

Falls wir (im Gegensatz zu ARISTOTELES) auch abgeschwächte Syllogismen zulassen, wird die Anwendung obiger Regeln gelegentlich auf einen der beiden abgeschwächten Syllogismen der ersten Figur führen, d.h.