Als zweites Beispiel betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\dot y(t) = -\frac{t}{y(t)} \quad \text{mit} \quad y(0) = 2\,.$$

Trennung der Veränderlichen und Integration führt auf

$$\int_2^y \eta\, d\eta = -\int_0^t d\tau \quad \text{oder} \quad \frac{y^2}{2} - \frac{2^2}{2} = -\frac{t^2}{2}\,.$$

Dies führt auf

$$y(t)^2 = 4 - t^2 \quad \text{oder} \quad y(t) = \pm\sqrt{4-t^2}\,,$$

aber tatsächlich ist die Anfangsbedingung $y(0) = 2$ nur dann erfüllt, wenn in Pluszeichen vor der Wurzel steht, d.h.

$$y(t) = \sqrt{4-t^2}\,.$$

Beim Auflösen der Gleichung nach y muß also nochmals die Anfangsbedingung ins Spiel gebacht werden, was eigentlich niemanden verwundern sollte: Eine nichtlineare Gleichung hat nur selten eine eindeutig bestimmte Lösung, wohingegen der Satz von PICARD-LINDELÖF zeigt, daß Anfangswertprobleme oft eindeutig lösbar sind. Von den mehreren Lösungen der impliziten Gleichung, die wir bei einer Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen bekommen, wird daher meist nur eine das Anfangswertproblem lösen.

Etwas komplizierter ist das Beispiel

$$\dot y(t) = \frac{1}{\cos^2 2t \cos^2 3y}\,;$$

Hier erhalten wir

$$\int \cos^2 3y\, dy = \int \frac{dt}{\cos^2 2t}\,.$$

Partielle Integration links und die Erinnerung an die Ableitung des Tangens für das rechte Integral führen auf die Beziehung

$$\frac16 \cos 3y \sin 3y + \frac{y}{2} = \frac12 \tan 2t + C\,,$$

die wir mittels der Beziehung

$$\sin x \cos x = \frac12 \sin 2x$$

noch etwas vereinfachen können zu

$$y + \frac16 \sin 6y = \tan 2t + C'\,.$$

Trotzdem dürfte es ziemlich hoffnungslos sein, wenn wir versuchen, nach y aufzulösen. Die Auflösung nach t ist aber problemlos, so daß wir mit

$$t = \frac12 \arctan\left(\frac{\sin 6y}{6} + y - C'\right)$$

wenigstens die Umkehrfunktion der Lösungsfunktion explizit darstellen können.

Als letztes Beispiel schließlich wollen wir eine Differentialgleichung betrachten, die auch von unabhängigem Interesse ist, die *logistische Gleichung*

$$\dot y(t) = \lambda y(t)\bigl(K - y(t)\bigr) \quad \text{mit} \quad \lambda, K > 0\,.$$

Sie beschreibt das Wachstum einer Population $y(t)$, deren Wachstumsrate sich immer weiter verlangsamt je mehr sich $y(t)$ an die Grenze K annähert. Für $y(t) = K$ ist $\dot y(t) = 0$, die Bevölkerungszahl bleibt also stabil, und für $y(t) > K$ ist $\dot y(t)$ negativ, d.h. die Bevölkerungszahl sinkt.

Dieses Modell wurde 1846 von dem belgischen Mathematiker PIERRE FRANÇOIS VERHULST (1804–1849) vorgeschlagen und unter anderem auf die Bevölkerungsentwicklung in Belgien angewandt. Er kam damals auf einen Schätzwert $K \approx 9\,400\,000$, der sich nicht sehr von der derzeitigen Bevölkerungszahl 10 300 000 *(Stand 2001)* unterscheidet

Da auf der rechten Seite der Differentialgleichung nur eine Funktion von y steht, haben wir trivialerweise eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen, und im interessanten Bereich

$$0 < y(t) < K$$

gibt es auch keine Probleme mit Nullstellen des Nenners. Wir erhalten damit

$$\int \frac{dy}{\lambda y(t)\big(K - y(t)\big)} = \int dt = t - t_0 ,$$

wobei der Grund für die Schreibweise der Integrationskonstante als $-t_0$ gleich klar werden wird.

Das Integral links kann durch Partialbruchzerlegung berechnet werden; da

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{K-y} = \frac{K}{y(K-y)}$$

ist, folgt

$$\frac{1}{\lambda y(K-y)} = \frac{1}{\lambda K}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{K-y}\right)$$

und

$$\int \frac{dy}{\lambda y(t)\big(K - y(t)\big)} = \frac{1}{\lambda K}\big(\ln y - \ln(K-y)\big) = \frac{1}{\lambda K} \ln \frac{y}{K-y} .$$

Die Umkehrfunktion der Lösungsfunktion ist also

$$t = t_0 + \frac{1}{\lambda K} \ln \frac{y}{K-y} .$$

Wir können auch nach y auflösen:

$$\frac{y}{K-y} = e^{\lambda K(t-t_0)} \Longrightarrow \frac{K-y}{y} = e^{-\lambda K(t-t_0)} \Longrightarrow \frac{K}{y} = 1 + e^{-\lambda K(t-t_0)} ,$$

und damit ist schließlich

$$y(t) = \frac{K}{1 + e^{-\lambda K(t-t_0)}} .$$

Speziell ist $y(t_0) = K/2$, die Integrationskonstante gibt also den Zeitpunkt an, zu dem die Population ihre halbe Maximalstärke erreicht hat.

Differenzieren der logistischen Differentialgleichung ergibt

$$\ddot{y}(t) = \lambda y(t)\big(-\dot{y}(t)\big) + \lambda \dot{y}(t)\big(K - y(t)\big) = \lambda \dot{y}(t)\big(K - 2y(t)\big) ,$$

die Wachstumsrate $\dot{y}(t)$ steigt also, solange $y(t) < K/2$ oder $t < t_0$ ist, danach beginnt sie zu sinken. Dementsprechend ist der Graph der

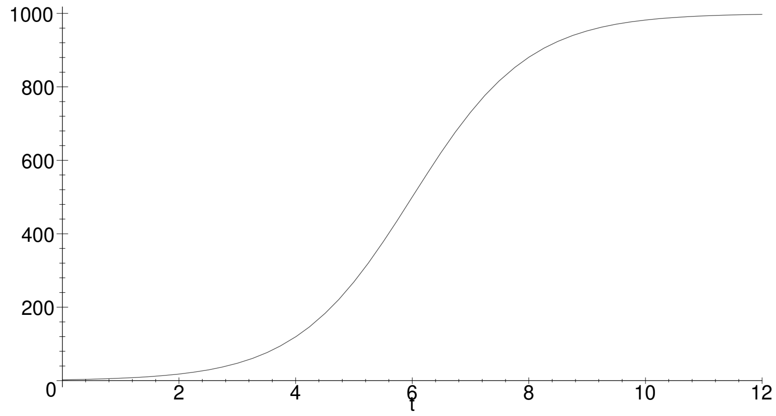


Abb. 37: Eine Lösungskurve der logistischen Differentialgleichung

Lösungsfunktion $y(t)$ konkav für $t < t_0$ und konvex für $t > t_0$; bei $t = t_0$ sitzt der einzige Wendepunkt. Da diese Kurvenform an ein langestrecktes S erinnert, spricht man von einer *sigmoiden* Kurve; der Leser kann sich aussuchen, ob er sich eher an σ, ς oder Σ erinnert fühlt.

Solche Kurven werden beispielsweise bei Erneuerungsprozessen oft beobachtet; ist etwa $y(t)$ = Prozentsatz aller in Frage kommender Personen oder Firmen, die zum Zeitpunkt t bereits eine technische oder sonstige Neuerung eingeführt haben, so genügt auch $y(t)$ ungefähr einer logistischen Gleichung. Dies erscheint plausibel, denn ein potentieller Anwender erfährt von der Neuerung im Gespräch mit jemandem, der sie schon eingeführt hat; es gibt am Anfang also um so mehr Zuwachs bei $y(t)$ je größer $f(t)$ ist. Andererseits kann ein Prozentsatz nie größer als 100 werden, so daß die Steigerungsrate gegen Null gehen muß, wenn sich $y(t)$ der 100%-Grenze nähert. Vergleiche zwischen diesem Modell und vielen tatsächlichen Erneuerungsprozessen findet man etwa bei

C.T. FISCHER, R.H. PRY: A simple substitution model of technological change, *Technological Forecasting and Social Changes* **3** (1971), 75–88.

VERHULST führte die logistische Gleichung, wie bereits erwähnt, zur Modellierung des Bevölkerungswachstums ein, allerdings zeigen weder die Daten für die Bundesrepublik Deutschland noch die für die

Weltbevölkerung eine gute Übereinstimmung mit diesem Modell. Seit 1940 immer wieder als Beispiel zitiert wird aber die Bevölkerung der Vereinigten Staaten von Amerika, das wir uns deshalb etwas genauer anschauen wollen:

Die Vereinigten Staaten führen seit 1790 in jedem zehnten Jahr einen „Census“ durch, in dessen Rahmen insbesondere auch die Gesamteinwohnerzahl festgestellt wird; sie bieten daher ein ideales Beispiel, für einen über einen langen Zeitraum hinweg dokumentierten Wachtumsprozess. Zwar hat sich das Territorium der USA seit 1790 gewaltig vergrößert, aber da Staaten wie das 1867 für \$7 200 000 dazugekaufte Alaska kaum Einwohner haben, ist der Effekt dieser Änderungen auf die Bevölkerungszahlen fast vernachlässigbar – besonders wenn man bedenkt, daß Volkszählungsdaten notorisch unzuverlässig sind. Wir betrachten daher die Daten, wie sie bei den einzelnen Volkszählung für das jeweils aktuelle Territorium ermittelt wurden.

Das U.S. Department of Commerce, Bureau of the Census, veröffentlicht diese Daten ohne jegliche Rundung; in der folgenden Tabelle sind sie zur besseren Übersicht auf volle Hunderttausender gerundet und in Einheiten von einer Million Einwohner angegeben.

Bevölkerungsentwicklung in den USA 1790–2000

Jahr:	1790	1800	1810	1820	1830	1840
Bevölkerung:	3,9	5,3	7,2	9,6	12,9	17,1
Jahr:	1850	1860	1870	1880	1890	1900
Bevölkerung:	23,2	31,4	38,6	50,2	63,0	76,2
Jahr:	1910	1920	1930	1940	1950	1960
Bevölkerung:	92,2	106,0	123,2	132,2	151,3	179,3
Jahr:	1970	1980	1990	2000		
Bevölkerung:	203,3	226,5	248,7	281,4		

Quelle: http://www.census.gov/main/www/cen2000.html

Die graphische Darstellung in Abbildung 38 zeigt die Datenpunkte zusammen mit einer logistischen Kurve; wie man sieht, ist die Überein-

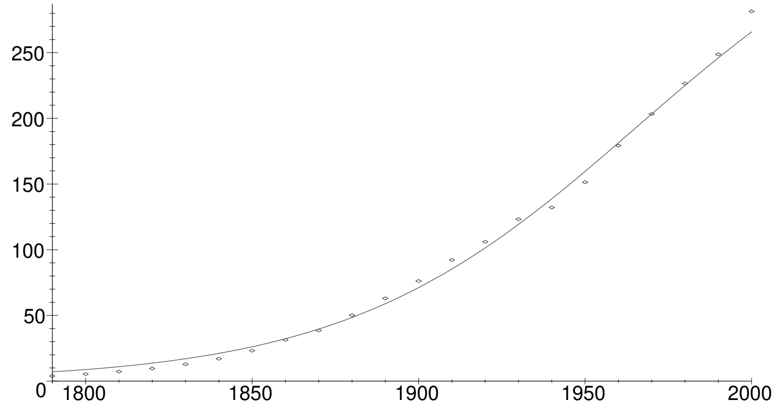


Abb. 38: U.S. Population Census 1790–2000 mit logistischer Kurve

stimmung recht gut, aber bei weitem nicht perfekt.

Eine bessere Modellierung mit *zwei* logistischen Kurven zeigt Abbildung 39: Die erste Kurve, die den Datenpunkten bis 1940 angepaßt ist, hat eine Grenzkapazität K von 190 Millionen Einwohner, die zweite, für die Daten ab 1950, hat $K = 356$ Millionen.

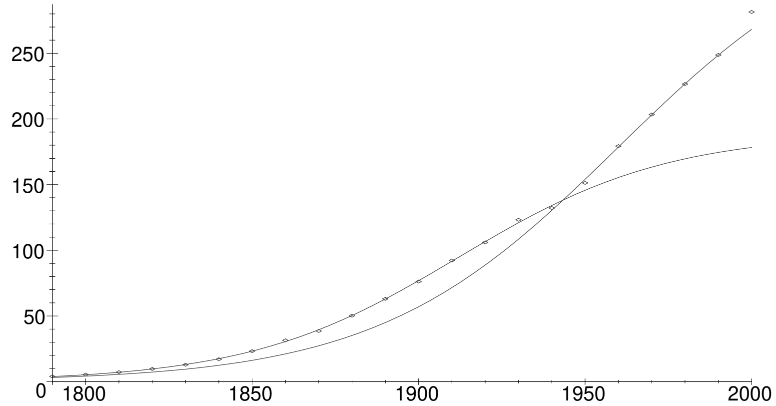


Abb. 39: U.S. Population Census 1790–2000 mit zwei logistischen Kurven

Historisch ist diese Beinahe-Verdoppelung leicht zu erklären: Schließlich gingen die USA aus dem zweiten Weltkrieg als Weltmacht hervor, und eine solche hat die Macht, auch teilweise auf Kosten anderer Staaten zu leben. Von daher erscheint es durchaus nachvollziehbar, daß sich die Grenzkapazität des Systems USA nach dem zweiten Weltkrieg deutlich vergrößert hat.

Erklärungsbedürftig ist auch der deutlich über der Kurve liegende Wert für 2000. Anhand der vorhandenen Daten läßt sich allerdings nicht beurteilen, ob es sich hier um den Beginn eines neuen Trends handelt, oder ob die ermittelte Bevölkerungszahl für das Jahr 2000 womöglich einfach dadurch zu erklären ist, daß die Vereinigten Staaten im Jahr 2000 Probleme mit dem Zählen hatten. Wenn in fünfzig Jahren fünf weitere Werte vorliegen, wird man mehr sagen können.

e) Exakte Differentialgleichungen und integrierende Faktoren

Im letzten Abschnitt ließ sich die Lösung einer Differentialgleichung gelegentlich nur in der impliziten Form $\Phi(y,t,C)=0$ angeben, wobei C die Integrationskonstante war.

Falls die Lösungsfunktionen, wie dies im allgemeinen der Fall sein wird, wirklich von C abhängen, kann die partielle Ableitung von Φ nach C nicht überall verschwinden; der Satz über implizite Funktionen (**[HM I]**, *Kap. 2, §1d*) sagt uns, daß die Gleichung $\Phi(y,t,C)=0$ überall dort nach C aufgelöst werden kann, wo diese partielle Ableitung von Null verschieden ist. Dort lassen sich die Lösungen mit einer geeigneten Funktion F also auch in der Form

$$F(y,t)=C$$

schreiben.

Umgekehrt können wir jede Kurvenschar, die durch eine Gleichung dieser Art implizit gegeben ist, als Lösungsmenge einer linearen Differentialgleichung interpretieren: Setzen wir für y eine Funktion $y(t)$ ein, so ist nach der Kettenregel

$$\frac{d}{dt}F\big(y(t),t\big)=\frac{\partial F}{\partial y}\big(y(t),t\big)\cdot\dot y(t)+\frac{\partial F}{\partial y}\big(y(t),t\big)\,.$$

Da $F\big(y(t),t\big)=C$ konstant ist, muß dies verschwinden; die gesuchte Differentialgleichung ist also

$$\frac{\partial F}{\partial y}\big(y(t),t\big)\cdot\dot y(t)+\frac{\partial F}{\partial y}\big(y(t),t\big)=0\,.$$

Andererseits verschwindet die Ableitung einer Funktion genau dann, wenn die Funktion konstant ist; die Lösungen dieser Differentialgleichung sind also genau die Funktionen, die (in impliziter Form) gegeben sind durch

$$F\big(y(t),t\big)=C \quad\text{mit}\quad C\in\mathbb{R}\,.$$

Als Beispiel betrachten wir die Schar von Kreisen

$$y^2+t^2=r^2 \quad\text{mit}\quad r\in\mathbb{R}\,.$$

Hier ist $F(y,t)=y^2+t^2$, also erhalten wir die Differentialgleichung

$$2y(t)\cdot\dot y(t)+2t=0\,,$$

was sich auch als

$$y(t)\cdot\dot y(t)=-t$$

schreiben läßt. In dieser Form haben wir eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen; Integration links und rechts liefert

$$\int y\,dy=-\int t\,dt \quad\text{oder}\quad \frac{y^2}{2}=-\frac{t^2}{2}+C\,.$$

Da die Summe zweier Quadrate nicht negativ sein kann, hat diese Gleichung nur für $C\ge 0$ eine Lösung (wobei der Fall $C=0$ in unserem Zusammenhang nichts Brauchbare liefert), also können wir $C=r^2/2$ setzen und erhalten dann genau die obigen Kreisgleichungen.

Hier ist die implizite Lösung sogar nützlicher als die explizite: Offenbar gibt es durch jeden Punkt (t_0,y_0) genau eine Lösungskurve. Auflösen nach y dagegen liefert die *beiden* Lösungen

$$y(t)=\pm\sqrt{r^2-t^2}\,,$$

wobei man jeweils anhand der Anfangsbedingung das richtige Vorzeichen finden muß. Für eine Anfangsbedingung $y(t_0)=c_0$ mit $c_0\neq 0$ ist das einfach das Vorzeichen von c_0; für $c_0 = 0$ aber lösen beide Funktionen

$$y_1(t) = \sqrt{r^2 - t_0^2} \quad \text{und} \quad y_2(t) = -\sqrt{r^2 - t_0^2}$$

das Anfangswertproblem. Dies entspricht natürlich genau dem, was wir nach dem Satz von PICARD-LINDELÖF erwarten, denn die rechte Seite der Differentialgleichung

$$\dot y(t) = \frac{-t}{y(t)}$$

erfüllt überall dort eine LIPSCHITZ-Bedingung, wo y nicht verschwindet.

In diesem Abschnitt wollen wir uns allgemein mit Differentialgleichungen beschäftigen, deren Lösungen implizit in der Form

$$F(y,t) = C \quad \text{mit} \quad C \in \mathbb{R}$$

dargestellt werden können.

Wie wir oben gesehen haben, ist

$$\frac{\partial F}{\partial y}\bigl(y(t),t\bigr)\cdot \dot y(t) + \frac{\partial F}{\partial y}\bigl(y(t),t\bigr) = 0$$

eine Differentialgleichung mit diesen Lösungen; eine solche Differentialgleichung bezeichnen wir als *exakt:*

Definition: Die Differentialgleichung

$$a(y,t)\dot y(t) + b(y,t) = 0$$

heißt *exakt,* wenn es eine differenzierbare Funktion $F(y,t)$ gibt mit

$$\frac{\partial F}{\partial y}(y,t) = a(y,t) \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial t}(y,t) = b(y,t)\,.$$

Zu diesen exakten Differentialgleichungen zählen insbesondere auch die Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen aus dem letzten Abschnitt. Diese hatten wir in der Form

$$h\bigl(y(t)\bigr)\,\dot y(t) = g(t) \quad \text{oder} \quad h\bigl(y(t)\bigr)\,\dot y(t) - g(t) = 0$$

geschrieben; mit

$$F(y,t) = \int h(y)\,dy - \int g(t)\,dt$$

ist hier gerade

$$\frac{\partial F}{\partial y}(y,t) = h(y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial t}(y,t) = -g(t)\,.$$

Andererseits ist aber nicht jede Differentialgleichungen der Form

$$a(y,t)\dot y(t) + b(y,t) = 0 \qquad (\star)$$

exakt: Das ist sie nur, wenn es eine Funktion $F(y,t)$ gibt mit

$$\frac{\partial F}{\partial y}(y,t) = a(y,t) \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial t}(y,t) = b(y,t)$$

d.h.

$$\nabla F(y,t) = \operatorname{grad} F(y,t) = \begin{pmatrix} a(y,t) \\ b(y,t) \end{pmatrix}.$$

Die Differentialgleichung $(\star)$ ist also genau dann exakt, wenn das Vektorfeld $\binom{a(y,t)}{b(y,t)}$ eine Stammfunktion hat.

Dies kann für stetig differenzierbare Funktionen a und b nach dem Lemma von SCHWARTZ (**[HM I]**, Kapitel 2, §2) nur dann der Fall sein, wenn

$$\frac{\partial a}{\partial t}(y,t) = \frac{\partial b}{\partial y}(y,t)$$

ist. Umgekehrt reicht diese Bedingung nach **[HM I]**, Kapitel 2, §6*f)* aus für die Existenz einer Stammfunktion, *falls* das Vektorfeld auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet definiert ist, falls es also keine Löcher im Definitionsbereich gibt, wie sie etwa durch Nullstellen von Nennern verursacht sein können. Insbesondere reicht die Bedingung also aus, wenn beide Funktionen auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert sind oder in einem Rechteck oder einer Kreisscheibe.

Als Beispiel betrachten wir die Differentialgleichung

$$te^{-ty(t)}\dot y(t) + 6t^2 + ye^{-ty(t)} = 0\,.$$

Diese Gleichung ist exakt, denn beide Koeffizientenfunktionen sind auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert und

$$\frac{\partial}{\partial t} te^{-ty(t)} = \frac{\partial}{\partial y}(6t^2 + ye^{-ty(t)}) = e^{-ty(t)} - tye^{-ty(t)} .$$

Für die Stammfunktion F des Vektorfelds ist einerseits

$$\frac{\partial F}{\partial y}(y,t) = te^{-ty}, \quad \text{also} \quad F(y,t) = -e^{-ty} + h_1(t)$$

mit irgendeiner nur von t abhängigen Funktion h_1, und andererseits

$$\frac{\partial F}{\partial t}(y,t) = 6t^2 + ye^{-ty(t)}, \quad \text{also} \quad F(y,t) = 2t^3 - e^{-ty} + h_2(y)$$

mit irgendeiner nur von y abhängigen Funktion h_2. Abgesehen von einer additiven Konstanten, die wir nach Belieben addieren können, passen diese beiden Gleichungen für $F(y,t)$ genau dann zusammen, wenn

$$F(y,t) = 2t^3 - e^{-ty}$$

ist; für die Lösungsfunktionen der Differentialgleichung ist also

$$F\big(y(t),t\big) = 2t^3 - e^{-ty(t)} = C \quad \text{oder} \quad e^{-ty(t)} = 2t^3 - C$$

mit einer beliebigen Konstanten $C \in \mathbb{R}$.

In diesem Fall läßt sich die implizite Gleichung unschwer nach $y(t)$ auflösen; wir erhalten

$$y(t) = -\frac{\ln(2t^3 - C)}{t} \quad \text{mit} \quad C \in \mathbb{R} .$$

Genau wie nur wenige Vektorfelder Stammfunktionen haben, sind auch nur wenige Differentialgleichungen exakt. Beispiel einer nichtexakten Differentialgleichung der Form $(\star)$ ist etwa

$$t^2 y(t)\dot{y}(t) + t^3 = 0 \quad \text{mit} \quad a(y,t) = t^2 y \ \text{ und } \ b(y,t) = t^3 ,$$

denn hier ist

$$\frac{\partial a}{\partial t}(y,t) = 2ty, \quad \text{aber} \quad \frac{\partial b}{\partial y}(y,t) = 0 .$$

Trotzdem können wir diese Differentialgleichung lösen: Wenn wir durch t^2 dividieren, erhalten wir die obige Differentialgleichung für konzentrische Kreise um den Nullpunkt, und da eine differenzierbare Funktion durch ihre Werte für $t \neq 0$ auch im Nullpunkt eindeutig festgelegt ist, verlieren wir durch die Division keine Lösungen.

Auch die Differentialgleichung

$$t^2\dot{y}(t) + ty + 1 = 0$$

ist nicht exakt, da

$$\frac{\partial t^2}{\partial t} = 2t \quad \text{und} \quad \frac{\partial(ty+1)}{\partial y} = t$$

voneiander verschieden sind. Multipliziert man die Gleichung aber mit e^{ty}, so wird sie exakt, denn

$$\frac{\partial(t^2e^{ty})}{\partial t} = \frac{\partial(ty+1)e^{ty}}{\partial y} = (t^2y + 2t)e^{ty} ,$$

und in der Tat sind t^2e^{ty} und $(ty+1)e^{ty}$ die partiellen Ableitungen von $F(y,t) = te^{ty}$ nach y und nach t.

An den Lösungen der Gleichung ändert sich durch die Multiplikation mit der nirgends verschwindenden Funktion e^{ty} nichts, sie sind also also gegeben durch die implizite Gleichung

$$te^{ty(t)} = C$$

oder explizit durch

$$y(t) = \frac{1}{t} \ln \frac{C}{t} ,$$

wie man sich leicht durch Einsetzen überzeugen kann. Diese Lösung existiert bei positivem C nur für $t > 0$, bei negativem nur für $t < 0$. Für $C = 0$ definiert $te^{ty(t)} = 0$ keine Funktion $y(t)$.

Wenn eine Differentialgleichung, wie in diesen beiden Beispielen, durch Multiplikation mit einer Funktion $\varphi(y,t)$ exakt gemacht werden kann, nennt man $\varphi(y,t)$ einen *integrierenden Faktor.* Ihn zu finden, kann im allgemeinen sehr schwierig sein: Einen einfach zusammenhängenden Definitionsbereich vorausgesetzt, ist die Gleichung

$$\varphi\big(y(t),t\big)a\big(y(t),t\big)\dot y(t)+\varphi\big(y(t),t\big)b\big(y(t),t\big)=0$$

genau dann exakt, wenn die partiellen Ableitungen des ersten Koeffizienten nach t und des zweiten Koeffizienten nach y miteinander übereinstimmen, wenn also

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(y,t)\cdot a(y,t)+\varphi(y,t)\frac{\partial a(y,t)}{\partial t}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}(y,t)\cdot b(y,t)+\varphi(y,t)\frac{\partial b(y,t)}{\partial y}$$

ist. Diese Gleichung für gegebene Funktionen a und b zu lösen ist leider fast aussichtslos; lediglich in speziellen Fällen kann man eine eine Lösung wirklich hinschreiben. Dazu gehört insbesondere der Fall, daß φ nur von einer der beiden Variablen abhängt:

Sucht man ein φ, das nur von t abhängt, vereinfacht sich die obige Gleichung zu

$$\dot\varphi(t)\cdot a(y,t)=\varphi(t)\left(\frac{\partial b(y,t)}{\partial y}-\frac{\partial a(y,t)}{\partial t}\right)$$

oder

$$\frac{\dot\varphi(t)}{\varphi(t)}=\frac{\frac{\partial b(y,t)}{\partial y}-\frac{\partial a(y,t)}{\partial t}}{a(y,t)}\,.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist die Ableitung von $\ln\varphi(t)$; falls die rechte Seite unabhängig von y ist, also nur eine Funktion $\psi(t)$, so ist also

$$\varphi(t)=e^{\int\psi(t)\,dt}\,.$$

Entsprechend kann man argumentieren, wenn φ nur von y abhängen soll; bezeichnen wir die Ableitung nach y durch einen Strich, wird dann die Gleichung zu

$$\varphi'(y)\cdot b(y,t)=\varphi(y)\left(\frac{\partial a(y,t)}{\partial t}-\frac{\partial b(y,t)}{\partial y}\right)$$

oder

$$\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}=\frac{\frac{\partial a(y,t)}{\partial t}-\frac{\partial b(y,t)}{\partial y}}{b(y,t)}\,.$$

Falls die rechte Seite nicht von t abhängt, also eine Funktion $\omega(y)$ ist, folgt wie oben

$$\varphi(y)=e^{\int\omega(y)\,dy}\,.$$

Ist also

$$\frac{\frac{\partial b(y,t)}{\partial y}-\frac{\partial a(y,t)}{\partial t}}{a(y,t)}\quad\text{unabhängig von } y$$

oder

$$\frac{\frac{\partial a(y,t)}{\partial t}-\frac{\partial b(y,t)}{\partial y}}{b(y,t)}\quad\text{unabhängig von } t\,,$$

läßt sich ein integrierender Faktor auch algorithmisch produzieren; ansonsten kann sich die Suche als schwierig erweisen.

Für die oben betrachtete Differentialgleichung

$$t^2\dot y(t)+ty+1=0$$

beispielsweise ist $a(y,t)=t^2$ und $b(y,t)=ty+1$, also

$$\frac{\frac{\partial a(y,t)}{\partial t}-\frac{\partial b(y,t)}{\partial y}}{b(y,t)}=\frac{t}{ty+1}$$

auch von t abhängig, so daß es keinen integrierenden Faktor gibt, der nur von y abhängt. Da aber

$$\frac{\frac{\partial b(y,t)}{\partial y}-\frac{\partial a(y,t)}{\partial t}}{a(y,t)}=\frac{-t}{t^2}=-\frac{1}{t}$$

nur von t abhängt, gibt es einen integrierenden Faktor, der nur von t abhängt, nämlich

$$\varphi(t)=e^{-\int\frac{dt}{t}}=e^{-\ln t}=\frac{1}{t}\,.$$

In der Tat ist

$$t\dot y(t)+y+\frac{1}{t}=0$$

eine exakte Differentialgleichung, und

$$F(y,t)=yt+\ln t$$

ist eine Stammfunktion, die (abgesehen von der etwas anderen Form der Integrationskonstanten) auf dieselbe Lösung, die wir oben mit einem etwas anderen F hergeleitet haben F.

Integrierende Faktoren, die sowohl von y als auch von t abhängen, können gelegentlich über Symmetriebetrachtungen gefunden werden: Die Differentialgleichung

$$a(y,t)\dot y(t) + b(y,t) = 0$$

habe die (unbekannte) Lösung $F(y,t) = C$ mit $C \in \mathbb{R}$. Angenommen, wie kennen eine Transformation der Koordinaten, die in Abhängigkeit von einem Paramter ε eine Lösungskurve $F(y,t) = C$ überführt in eine neue Lösungskurve $F(y_\varepsilon, t_\varepsilon) = C_\varepsilon$, wobei $\varepsilon = 0$ der Ausgangslösung entsprechen soll. Nach dem Satz über implizite Funktionen können wir dann auch eine Transformation finden, für die $C_\varepsilon = C + \varepsilon$ ist. Es könnte schwierig sein, so eine Transformation explizit anzugeben; es reicht uns allerdings, wenn wir sie nur in erster Näherung kennen, d.h. bis auf Terme, die schneller gegen null gehen als ε:

$$y_\varepsilon = y + \varepsilon\eta(y,t) + o(\varepsilon) \quad \text{und} \quad t_\varepsilon = t + \varepsilon\tau(y,t) + o(\varepsilon)\,.$$

Dann ist

$$C + \varepsilon = F(y_\varepsilon, t_\varepsilon) = F(y,t) + \varepsilon\big(F_y(y,t)\eta(y,t) + F_t(y,t)\tau(y,t)\big) + o(\varepsilon)\,,$$

also

$$F_y(y,t)\eta(y,t) + F_t(y,t)\tau(y,t) = 1\,. \tag{$*$}$$

Außerdem ist nach dem Satz über implizite Funktionen

$$\dot y(t) = -\frac{F_t(y,t)}{F_y(y,t)}\,;$$

da $y(t)$ Lösung der Differentialgleichung ist, folgt

$$-a(y,t)\frac{F_t(y,t)}{F_y(y,t)} + b(y,t) = 0$$

oder

$$-b(y,t)F_y(y,t) + a(y,t)F_t(y,t) = 0\,.$$

Diese Gleichung, zusammen mit Gleichung $(*)$ ist ein lineares Gleichungssystem für $F_y(y,t)$ und $F_t(y,t)$; nach der CRAMERschen Regel hat es die Lösung

$$F_y(y,t) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \tau(y,t) \\ 0 & a(y,t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \eta(y,t) & \tau(y,t) \\ -b(y,t) & a(y,t) \end{vmatrix}} = \frac{a(y,t)}{\eta(y,t)a(y,t) + \tau(y,t)b(y,t)}$$

und

$$F_t(y,t) = \frac{\begin{vmatrix} \eta(y,t) & 1 \\ -b(y,t) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \eta(y,t) & \tau(y,t) \\ -b(y,t) & a(y,t) \end{vmatrix}} = \frac{b(y,t)}{\eta(y,t)a(y,t) + \tau(y,t)b(y,t)}\,.$$

Insbesondere ist

$$\frac{F_y(y,t)}{a(y,t)} = \frac{F_t(y,t)}{b(y,t)} = \frac{1}{\eta(y,t)a(y,t) + \tau(y,t)b(y,t)}$$

ein integrierenden Faktor.

f) Qualitative Theorie

Ein allgemeines System

$$\dot{\vec y}(t) = f\left(\vec y(t), t\right)$$

wird nur selten eine Lösung haben, die sich in geschlossener Form angeben läßt; meist wird man sich mit (nicht immer unproblematischen) numerischen Näherungslösungen begnügen müssen. In diesem letzten Abschnitt des Paragraphen über Differentialgleichungen wollen wir uns, hauptsächlich anhand von Beispielen, überlegen, wie man auch bei solchen nicht explizit lösbaren Gleichungen zu Aussagen über das Verhalten der Lösungsfunktionen kommen kann.

Eine wesentliche Rolle spielen dabei die Gleichgewichtslösungen:

Definition: Ein Punkt $\vec y_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt *Fixpunkt* oder *Gleichgewichtslösung* des Differentialgleichungssystems $\dot{\vec y}(t) = f\big(\vec y(t), t\big)$, wenn die konstante Funktion $\vec y(t) = \vec y_0$ eine Lösung ist.

Anschaulich bedeutet dies, daß der Zustand eines Systems, das durch diese Differentialgleichung beschrieben wird, für $\vec{y}(t) = \vec{y}_0$ zeitlich konstant ist, das System befindet sich also im Gleichgewicht.

Da die Ableitung einer konstanten Funktion verschwindet, sind die Fixpunkte des Differentialgleichungssystems $\dot{\vec{y}}(t) = f\big(\vec{y}(t), t\big)$ gerade die Lösungen des Gleichungssystems

$$f(\vec{y}_0, t) = 0 \quad \text{für alle } t \in [t_0,\, t_1]\,.$$

Bei einem nichtlinearen Differentialgleichungssystem ist das ein nichtlineares Gleichungssystem, man wird sich daher oft mit Näherungslösungen begnügen müssen. (Die Variable t tritt natürlich nur bei nichtautonomen Systemen auf; bei den in Naturwissenschaft und Technik häufigen autonomen Systemen haben wir ein Gleichungssystem, in dem nur die Komponenten von $\vec{y}_0$ vorkommen.)

Ein klassisches Beispiel, bei dem sich die Fixpunkte leicht ausrechnen lassen, ist das Raubtier-Beutetier-Modell, das 1925 von LOTKA und VOLTERRA vorgeschlagen wurde: In einem Gebiet gebe es eine Population von Raubtieren, die sich von genau einer Art von Beutetieren ernähren. Für die Beutetiere sei genügend Nahrung vorhanden, so daß diese sich, falls es keine Raubtiere gäbe, beliebig vermehren könnten. Wenn wir die Populationsstärke zum Zeitpunkt t mit $x(t)$ bezeichnen, können wir also annehmen, daß die Beutetiere bei Abwesenheit der Raubtiere eine konstanter Wachstumsrate hätten, d.h.

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t) \quad \text{mit} \quad \alpha > 0\,.$$

Die Raubtiere, deren Bestand zum Zeitpunkt t wir mit $y(t)$ bezeichnen wollen, würden in Abwesenheit der Beutetiere relativ schnell verhungern und somit aussterben, was wir durch eine negative Wachstumsrate modellieren können:

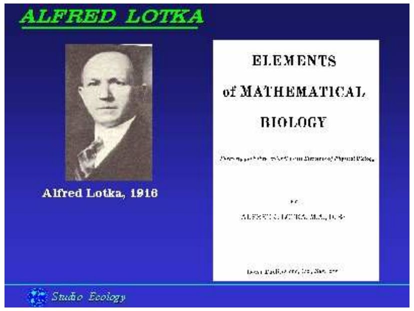
$$\dot{y}(t) = -\gamma y(t) \quad \text{mit} \quad \gamma > 0\,.$$

Nun sind aber die Raubtiere und die Beutetiere nicht isoliert voneinander, sondern es kommt zu Begegnungen zwischen den beiden Populationen. Deren Häufigkeit ist etwa proportional zum Produkt der beiden Populationsstärken, und die Auswirkung einer solchen Begegnung ist

positiv für die Wachstumsrate der Raubtiere, aber negativ für die der Beutetiere. Unser Modell läßt sich somit beschreiben durch das System

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \quad \alpha x(t) - \beta x(t)y(t) \\ \dot{y}(t) &= -\gamma y(t) + \delta x(t)y(t) \end{aligned}$$

mit positiven reellen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.



Der amerikanische Wissenschaftler ALFRED LOTKA (1880–1949) war von der Ausbildung her ein Mathematiker, interessierte sich aber Zeit seines Lebens stark für Physik, insbesondere Thermodynamik, und war einer der ersten, der die Evolution unter physikalischen Gesichtspunkten betrachtete. Er zählt zu den Pionieren der Selbstorganisation, der Bioenergetik und (auch für eine Versicherung) der Demographie.

VITO VOLTERRA (1860–1940) wurde in Ancona im damaligen Kirchenstaat geboren. Er studierte bereits als Elfjähriger mathematische Literatur, promovierte dann aber in Physik über ein Thema aus der Hydrodynamik. Er hatte Lehrstühle für Mechanik und für mathematische Physik in Pisa, Turin und Rom. Seine wichtigsten Arbeiten beschäftigen sich mit partiellen Differentialgleichungen und vor allem Integralgleichungen. Ab 1922 kämpfte er im italienischen Parlament gegen den Faschismus und verlor deshalb 1931 nach Auflösung des Parlaments seinen Lehrstuhl in Rom. Den Rest seines Lebens verbrachte er größtenteils im Exil.

Zur Bestimmung der Gleichgewichtslösungen müssen wir für $x(t)$ und $y(t)$ Konstanten einsetzen; dies führt auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= \quad \alpha x_0 - \beta x_0 y_0 = x_0(\alpha - \beta y_0) \\ 0 &= -\gamma\, y_0 + \delta x_0 y_0 = y_0(\gamma - \delta x_0)\,. \end{aligned}$$

Es gibt somit genau zwei Gleichgewichtslösungen: Einmal die uninteressante Lösung $x(t) = y(t) \equiv 0$, die im wesentlichen besagt, daß ohne Raub- und Beutetiere in diesem System nichts passiert, und dann noch die Lösung

$$x(t) \equiv \frac{\gamma}{\delta} \quad \text{und} \quad y(t) \equiv \frac{\alpha}{\beta} .$$

Falls die beiden Populationen diese Stärken haben, fressen also die Raubtiere genau so viele Beutetiere weg, wie nachwachsen; umgekehrt reichen die Beutetiere gerade aus, um die Raubtierpopulation zu ernähren.

Was passiert, wenn die Populationen nicht im Gleichgewicht sind? Wir haben offensichtlich kaum Chancen, das Differentialgleichungssystem explizit zu lösen, aber wir können trotzdem versuchen, etwas über die Lösungs*kurven* in Erfahrung zu bringen.

Wenn wir y als Funktion von x betrachten, ist

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{-\gamma y + \delta xy}{\alpha x - \beta xy} = \frac{y}{\alpha - \beta y} \cdot \frac{\delta x - \gamma}{x} ,$$

wir haben also eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. Trennung der Variablen führt auf

$$\int \left(\frac{\alpha}{y} - \beta \right) dy = \int \left(\delta - \frac{\gamma}{x} \right) dx$$

oder

$$\alpha \ln y - \beta y = \delta x - \gamma \ln x + C .$$

Anwendung der Exponentialfunktion macht daraus

$$\frac{y^\alpha}{e^{\beta y}} = \frac{e^{\delta x}}{x^\gamma} \cdot e^C .$$

Diese Gleichung können wir zwar weder nach y noch nach x auflösen, aber eine einfache Kurvendiskussion der Funktionen

$$f(y) = \frac{y^\alpha}{e^{\beta y}} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{e^{\delta x}}{x^\gamma}$$

zeigt, daß die Ableitung in beiden Fällen außer im Nullpunkt noch in genau einem weiteren Punkt verschwindet, nämlich dort wo x *bzw.* y gleich der entsprechenden Koordinate des nichttrivialen Gleichgewichtspunkts ist. f hat in diesem Punkt ein Maximum, g ein Minimum, und für $t \to 0$ oder $t \to \infty$ geht f gegen null und g gegen unendlich.

Da beide Funktionen im positiven Bereich der reellen Achse nur positive Werte annehmen, gibt es für eine vorgegebene positive Zahl c somit höchstens zwei Werte, an denen sie von f *bzw.* g angenommen wird; für zu große c, gibt es kein y mehr mit $f(y) = c$, und für zu kleine c kein x mit $g(x) = c$.

Daraus folgt nach kurzer Überlegung, daß die Lösungskurven (abgesehen von den beiden Fixpunkten) auf geschlossenen Kurven um den nichttrivialen Fixpunkt liegen. Da kein Punkt auf einer solchen Kurve Fixpunkt ist, kann keine Lösungskurve für $t \to \infty$ gegen einen Punkt einer solchen Kurve konvergieren, die Lösungskurven müssen also den nichttrivialen Gleichgewichtspunkt permanent umrunden.

Betrachten wir eine konkrete Lösung $\big(x(t), y(t)\big)$ des Differentialgleichungssystems, das wir der Einfachheit halber kurz als

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = F\big(x(t), y(t)\big)$$

schreiben wollen, und fixieren wir einen Zeitpunkt t_0; für diesen sei $x(t_0) = a$ und $y(t_0) = b$. Dann muß es nach obiger Diskussion ein kleinste Zeitspanne T geben, so daß auch

$$x(t_0 + T) = a \quad \text{und} \quad y(t_0 + T) = b$$

ist. Für die beiden Funktionen

$$u(t) \underset{\text{def}}{=} x(t + T) \quad \text{und} \quad v(t) \underset{\text{def}}{=} y(t + T)$$

ist dann $u(t_0) = a$ und $v(t_0) = b$; außerdem ist

$$\begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t + T) \\ \dot{y}(t + T) \end{pmatrix} = F\big(x(t + T), y(t + T)\big) = F\big(u(t), v(t)\big) ,$$

$\big(x(t), y(t)\big)$ und $\big(u(t), v(t)\big)$ lösen also dasselbe Anfangswertproblem. Falls wir zeigen können, daß F eine LIPSCHITZ-Bedingung erfüllt, müssen die beiden Funktionen also übereinstimmen.

Im betrachteten Beispiel ist

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha x - \beta xy \\ -\gamma y + \delta xy \end{pmatrix} ,$$

also

$$\|F(x_1,y_1)-F(x_2,y_2)\| = \left\| \begin{pmatrix} \alpha(x_1-x_2)-\beta(x_1y_1-x_2y_2) \\ -\gamma(y_1-y_2)+\delta(x_1y_1-x_2y_2) \end{pmatrix} \right\| .$$

Im Quadrat $-R \le x, y \le R$ ist

$$|\alpha(x_1-x_2)-\beta(x_1y_1-x_2y_2)| \le |\alpha(x_1-x_2)| + |\beta(x_1y_1-x_2y_2)|$$

und

$$\begin{aligned} |(x_1y_1-x_2y_2)| &= |x_1y_1-x_1y_2+x_1y_2-x_2y_2| \\ &= |x_1(y_1-y_2)+y_2(x_1-x_2)| \\ &\le |x_1(y_1-y_2)|+|y_2(x_1-x_2)| \\ &\le R\big(|y_1-y_2|+|x_1-x_2|\big) , \end{aligned}$$

also ist

$$\begin{aligned} &|\alpha(x_1-x_2)-\beta(x_1y_1-x_2y_2)| \\ &\le \alpha\,|(x_1-x_2)|+\beta R\big(|y_1-y_2|+|x_1-x_2|\big) . \end{aligned}$$

Analog folgt die Ungleichung

$$\begin{aligned} &|\gamma(y_1-y_2)+\delta(x_1y_1-x_2y_2)| \\ &\le \gamma\,|(y_1-y_2)|+\delta R\big(|y_1-y_2|+|x_1-x_2|\big) . \end{aligned}$$

Wir arbeiten hier mit der Maximumsnorm von Vektoren, $\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|$ ist also das Maximum von $|x|$ und $|y|$, und entsprechend ist

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\| = \max\big\{|x_1-x_2|\,,|y_1-y_2|\big\} .$$

Mit

$$L = \max\{\alpha+2\beta R, \gamma+2\delta R\}$$

ist somit

$$\|F(x_1,y_1)-F(x_2,y_2)\| \le L \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\| ;$$

F erfüllt also eine LIPSCHITZ-Bedingung, so daß wir aus dem Satz von PICARD-LINDELÖF folgern können, daß das Anfangswertproblem in jedem abgeschlossenen Quadrat eindeutig lösbar ist.

Da jede Lösungskurve in einem abgeschlossenen Quadrat liegt (sonst müßte sie irgendwo gegen unendlich gehen), ist also

$$u(t) = x(t) \quad \text{und} \quad v(t) = y(t) \quad \text{für alle } t \ge t_0$$

d.h.

$$x(t+T) = x(t) \quad \text{und} \quad y(t+T) = y(t) \quad \text{für alle } t \ge t_0 .$$

Damit wissen wir, daß alle Lösungsfunktionen periodisch sind.

In der unmittelbaren Umgebung der nichttrivialen Gleichgewichtslösung können wir sogar noch etwas mehr sagen: Durch TAYLOR-Entwicklung der oben betrachteten Funktionen f und g überzeugt man sich leicht davon, daß die Lösungskurven dort näherungsweise als Ellipsen aufgefaßt werden können.

Nach all diesen Vorbereitungen sollten wir uns endlich eine konkrete Lösungskurve anschauen, d.h. wir sollten das Problem in einem Spezialfall numerisch lösen.

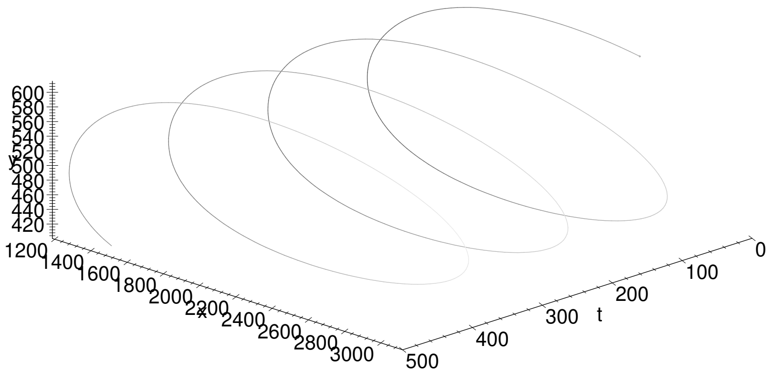


Abb. 40: Numerische Simulation des Raubtier-Beutetier-Systems

Abbildung 40 zeigt das Ergebnis; die spiralförmige Kurve entspricht genau unseren Erwartungen.

Besser können wir diese überprüfen, wenn wir eine Reihe von Lösungskurven in der xy-Ebene betrachten; Abbildung 41 zeigt solche Kurven zu verschiedenen Anfangsbedingungen. Abgesehen von der Gleichgewichtslösung, die einfach ein Punkt ist, sieht man die vorhergesagten geschlossenen Kurven, die das Gleichgewicht umrunden.

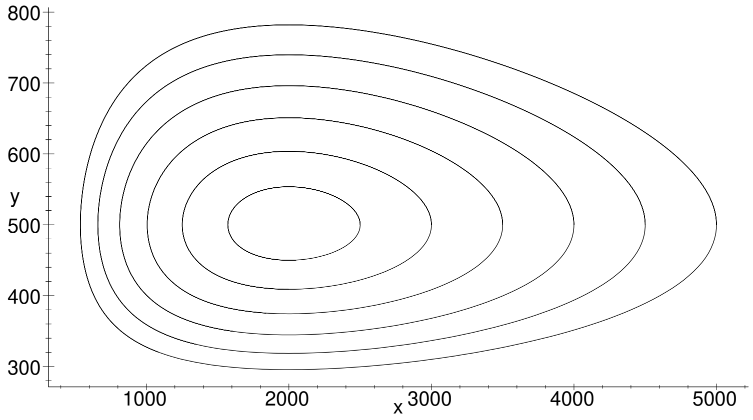


Abb. 41: Lösungskurven in der xy-Ebene

Man kann sich leicht klarmachen, was der Umlauf auf so einer Lösungskurve biologisch bedeutet: Im jeweils untersten Punkt ist die Raubtierpopulation minimal, so daß sich die Beutetiere stark vermehren können; dadurch verbessert sich die Nahrungsgrundlage für die Raubtiere, was nun auch zu deren Vermehrung führt, so daß die Kurve auf ihren am weitesten rechts gelegenen Punkt zusteuert, in dem die Beutetiere ihre maximale Populationsstärke erreichen. Die gestiegene Raubtierpopulation frißt nun, nachdem sie ihren Gleichgewichtswert überschritten hat, mehr Beutetiere als nachwachsen, kann sich aber wegen der großen Anzahl vorhandener Beutetiere weiterhin vermehren auf ein Maximum hin, das am obersten Punkt der Lösungskurve erreicht ist. Danach reicht der bereits gesunkene Bestand an Beutetieren nicht mehr aus als Nahrungsgrundlage für die Raubtiere, ihre Population geht also zurück, reicht aber immer noch aus, um die Beutetiere weiter zu dezimieren. Im Punkt links außen hat deren Bestand schließlich sein Minimum erreicht; die

weiterhin sinkende Raubtierpopulation frißt nun weniger Beutetiere als nachwachsen und leidet trotzdem weiter an Nahrungsmangel. Sobald sie ihr Minimum erreicht hat, schließt sich der Kreis, und der gleiche Zyklus beginnt von vorne.

Auch wenn Raubtiere und Beutetiere in der Technischen Informatik keine große Rolle spielen, sollten wir uns doch zumindest kurz fragen, ob die mathematische Lösung irgendetwas mit der biologischen Realität zu tun hat – der Zusammenhang zwischen idealisierten mathematischen Modellen und realen Systemen ist schließlich auch in der Technischen Informatik von Bedeutung.

Wie in vielen praktischen Anwendungen der Mathematik sind die Annahmen des Modells auch hier viel zu einfach: Es gibt kaum je zwei Arten, die völlig isoliert vom Rest der Welt leben. Trotzdem wurden die vorhergesagten Zykel schon beobachtet: Die Hudson Bay Company sammelte rund hundert Jahre lang Daten über gekaufte Felle von Luchsen (Raubtieren) und Schneehasen (deren Beute); da die Trapper kaum beeinflussen können, was in ihre Fallen läuft, sollten diese Anzahlen ungefähr proportional sein zu den jeweiligen Populationszahlen. Abbildung 42 zeigt ungefähr die vorhergesagten zyklischen Schwankungen – auch wenn die Schwankungen zwischen 1875 und 1905 in die falsche Richtung gehen: Dort wird der Gleichgewichtspunkt nicht gegen den Uhrzeigersinn umrundet, sondern im Uhrzeigersinn.

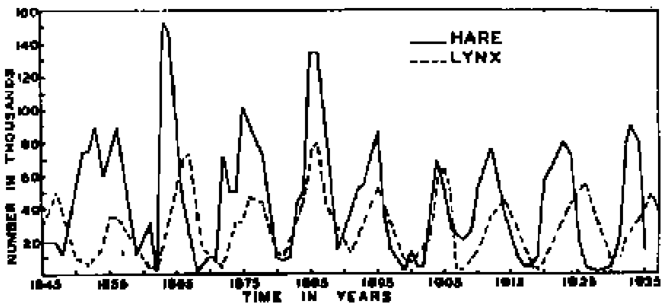


Abb. 42: Luchse und Schneehasen

Über den genauen Grund dafür gibt es immer noch viele Spekulationen; der Grund, warum Abweichungen vom Modell auftreten müssen ist aber einfach zu verstehen: Die Realität deutlich komplizierter ist als das extrem vereinfachte Modell von LOTKA und VOLTERRA.

Das vorliegende Beispiel ist natürlich, wie fast alle Beispiele in einer Anfängervorlesung, viel zu elementar: Im allgemeinen kann man einer Differentialgleichung nicht auf so einfache Weise so viele Eigenschaften der Lösungen ansehen.

Die qualitative Theorie der Differentialgleichungen wendet denn auch viele Methoden an, die weit jenseits des Stoffs dieser Vorlesung liegen, und selbst damit kann sie in komplizierteren Fällen nur deutlich weniger Information aus der Differentialgleichung extrahieren als in diesem Beispiel.

Einen ersten Überblick über das Verhalten der Lösungen einer *autonomen* Differentialgleichung in nur zwei Variablen liefert auch bei beliebig komplizierten Systemen ein graphisches Verfahren: Bei einer autonomen Differentialgleichung

$$\dot{\vec{y}}(t) = F\big(\vec{y}(t)\big)$$

definiert die Funktion F ein Vektorfeld, wie wir es aus **[HM1]**, *Kapitel 2,* kennen.

Spätestens an dieser Stelle wird klar, daß wir in diesem Kapitel bei der Unterscheidung von Punkten und Vektoren geschlampt haben: Für die linearen homogenen Differentialgleichungssysteme, die den Hauptinhalt dieses Kapitels bilden, war es völlig in Ordnung, nur von Vektoren zu reden: Dort gibt es einen wohldefinierten Nullpunkt, so daß sich Punkte und Vektoren in kanonischer Weise entsprechen.

Zur geometrischen Interpretation von $\dot{\vec{y}}(t) = F\big(\vec{y}(t)\big)$ ist es aber sinnvoller, das Argument $\vec{y}$ von F als Punkt $\boldsymbol{y}$ aufzufassen und den Funktionswert als Tangenten*vektor* in diesem Punkt zu interpretieren. Eine Lösungskurve der Differentialgleichung ist dann eine Kurve, die in jedem Punkt $\boldsymbol{y}$ den Vektor $F(\boldsymbol{y})$ als Tangentenvektor hat.

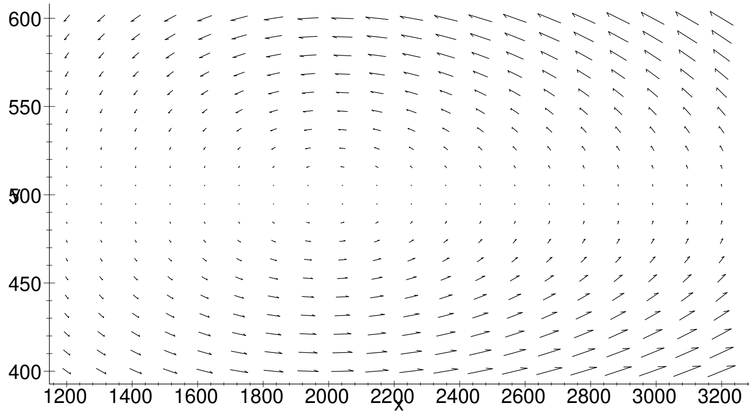


Abb. 43: Das Vektorfeld zur Raubtier-Beutetier-Gleichung

Abbildung 43 zeigt das Vektorfeld im betrachteten Beispiel; es legt zumindest die Vermutung nahe, daß die Lösungen zyklisch um einen Punkt rotieren. *Genau* können das wir freilich aufgrund der graphischen Information nicht sagen: Eine visuell nicht wahrnehmbare Richtungsänderung der Vektoren gehört zu einer Lösung die sich spiralförmig auf den Gleichgewichtspunkt zusammenzieht oder aber spiralförmig ins Unendliche geht.

Schon bei der Visualisierung von Vektorfeldern haben wir gesehen, daß es gelegentlich übersichtlicher ist, auf die Längeninformation zu verzichten und nur die Richtung zu betrachten. Bei Differentialgleichungen, bei denen es bei einer graphischen Lösung praktisch nur auf die *Richtung* des Vektorfelds in jedem Punkt ankommt, gilt dies umso mehr; oft versucht man daher die Lösungskurve durch ein auf Einheitslänge normiertes Vektorfeld zu führen. Abbildung 44 zeigt, wie dies im vorliegenden Beispiel aussieht.

g) Stabilitätsfragen

Die Beschreibung eines realen Systems durch ein mathematisches Modell wie ein Differentialgleichungssystem ist abgesehen von einigen ganz einfachen Fällen immer mit einer Idealisierung verbunden; das reale System verhält sich daher nicht *exakt* so wie das Modell es vorhersagt.

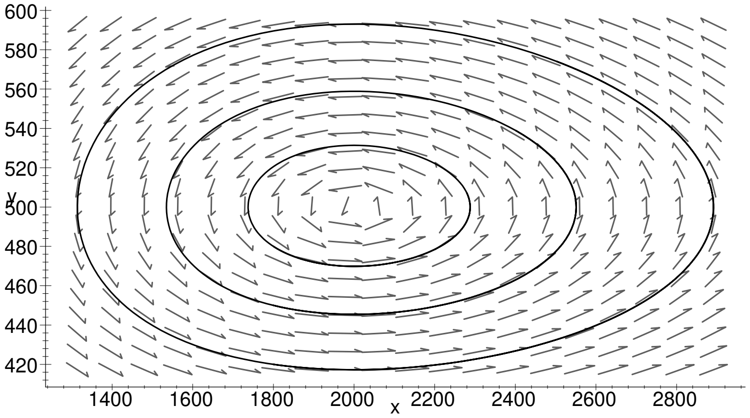


Abb. 44: Anpassung von Lösungskurven an das Vektorfeld

Auch die Anfangsbedingungen des Modells, die dem Zustand des realen Systems zu einem vorgegebenen Anfangszeitpunkt entsprechen, lassen sich nur durch fehlerbehaftete Messungen bestimmen. Hinzu kommt, daß man bei der Auswertung des mathematischen Modells nur selten wirklich mit reellen Zahlen rechnet; meistens rechnet man per Computer und somit (falls man keine sehr spezialisierte Mathematiksoftware benutzt) mit rundungsfehlerbehafteten Gleitkommaoperationen.

Aus einem mathematischen Modell abgeleiteten Aussagen können daher nur dann nützlich für die Vorhersage von realen Systemen sein, wenn sie stabil sind gegenüber kleineren Änderungen von Koeffizienten und Anfangsbedingungen.

Betrachten wir dazu ein Beispiel: Eine Größe $y(t)$ sei beschrieben durch das Anfangswertproblem

$$\dot y(t) = y(t) + 2e^{-t} \quad \text{mit} \quad y(0) = 1 .$$

Wie man sich sofort durch Einsetzen überzeugt, ist $y(t) = e^{-t}$ eine Lösung. Die rechte Seite

$$F(y,t) = y - e^{-t}$$

genügt offensichtlich auf ganz $\mathbb{R}^2$ einer LIPSCHITZ-Bedingung mit Kon-

stante eins, denn $F_y(y,t) \equiv 1$, und man sieht auch direkt, daß

$$|F(y_1,t) - F(y_2,t)| = |y_1 - y_2| \le 1 \cdot |y_1 - y_2|$$

ist. Somit ist $y(t) = e^{-t}$ die *einzige* Lösung des Anfangswertproblems.

Trotzdem ist diese Lösung für alle praktischen Zwecke völlig wertlos:

$$\dot y(t) = y(t) - 2e^{-t}$$

ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung, deren zugehörige homogene Gleichung

$$\dot y(t) = y(t)$$

die allgemeine Lösung

$$y(t) = \lambda e^{t}$$

hat. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist daher

$$y(t) = e^{-t} + \lambda e^{t} \quad \text{und} \quad y(0) = 1 + \lambda .$$

Sobald also die Anfangsbedingung auch nur minimal gestört wird, geht die Lösung für große t nicht mehr gegen null, sondern je nach Vorzeichen von λ gegen $\pm\infty$. Bei einem solchen *schlecht gestellten* oder *strukturell instabilen* Problem läßt sich also mathematisch nichts vorhersagen.

Auch eine numerische Lösung des Anfangswertsproblems wird wegen allfälliger Rundungsfehler über kurz oder lang die exakte Lösungskurve $y(t) = e^{-t}$ verlassen und auf eine der zumindest anfänglich benachbarten anderen Kurven überwechseln, so daß auch sie für $t \to \infty$ divergiert. Abbildung 45 zeigt eine mit einem RUNGE-KUTTA-Verfahren der Ordnung vier/fünf berechnete numerische Lösung; wie man sieht, hat sie ab etwa $t = 14$ nichts mehr mit der korrekten Lösung zu tun.

Anders sieht es aus beim Anfangswertproblem

$$\dot y(t) = -y(t) + 1 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1 .$$

Hier überzeugt man sich leicht, daß $y(t) = 1$ die einzige Lösung ist, aber jetzt hat die zugehörige homogene Differentialgleichung die allgemeine Lösung $y(t) = \lambda e^{-t}$; die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\dot y(t) = -y(t) + 1$$

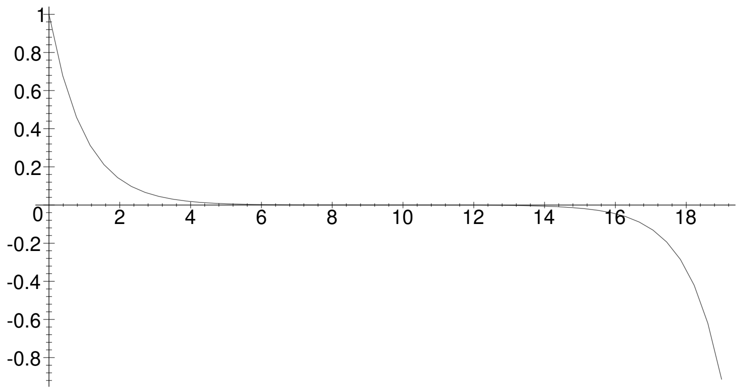


Abb. 45: Divergenz einer numerisch berechneten Lösungskurve

ist also
$$y(t) = 1 + \lambda e^{-t} \quad \text{mit} \quad y(0) = 1 + \lambda\,.$$
Kleine Störungen λ des Anfangswerts werden jetzt durch den Faktor e^{-t} weggedämpft; unabhängig von solchen Störungen bleibt also die Lösung $y \equiv 1$ stabil.

Um allgemeiner zu sehen, was in der Umgebung eines Gleichgewichts passieren kann, versuchen wir, die Gleichung in der Umgebung des Gleichbewichts anzunähern durch die einzige Klasse von Differentialgleichungen, die wir wirklich beherrschen, die linearen homogenen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Dazu erinnern wir uns an die Definition einer differenzierbaren Funktion mehrerer Veränderlicher: $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_n$ ist im Punkt $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar, wenn in einer Umgebung des Punktex gilt
$$F(\boldsymbol{x} + \vec{h}) = F(\boldsymbol{x}) + J_F(\boldsymbol{x})\vec{h} + o\big(\|\vec{h}\|\big)\,,$$
wobei $J_F(\boldsymbol{x})$ die JACOBI-Matrix von F in $\boldsymbol{x}$ ist.

Wir betrachten ein autonomes Differentialgleichungssystem
$$\dot{\vec{y}}(t) = F\big(\vec{y}(t)\big)$$

mit einer differenzierbaren Funktion F mit Fixpunkt $\vec{y}_0$. In der Umgebung des Fixpunkts ist dann
$$F(\vec{y}_0 + \vec{h}) = F(\vec{y}_0) + J_F(\vec{y}_0)\vec{h} + o\big(\|\vec{h}\|\big) = \vec{y}_0 + J_F(\vec{y}_0)\vec{h} + o\big(\|\vec{h}\|\big)\;;$$
falls wir den Fehlerterm $o\big(\|\vec{h}\|\big)$ vernachlässigen, genügt also die Differenz
$$\vec{u}(t) \underset{\text{def}}{=} \vec{y}(t) - \vec{y}_0$$
zwischen der Gleichgewichtslösung und einer nahe benachbarten Lösung näherungsweise einer linearen homogenen Differentialgleichung
$$\dot{\vec{u}}(t) = J_F(\vec{y}_0)\vec{u}(t)\,.$$
Das Langzeitverhalten von deren Lösungen hängt, wie wir aus §3*c)* wissen, von den Eigenwerten der Matrix $J_F(\vec{y}_0)$ ab: Falls diese allesamt negativen Realteil haben, konvergiert jede Lösung $\vec{u}$ für $t \to \infty$ gegen den Nullpunkt; falls alle Eigenwerte positiven Realteil haben, divergiert jede Lösung außer der Null ins Unendliche. Im ersten Fall sprechen wir von einem *stabilen* oder *anziehenden* Fixpunkt, im zweiten von einem *instabilen* oder *abstoßenden.* Falls einige Eigenwerte positiven und andere negativen Realteil haben, reden wir von einem *Sattelpunkt;* hier hängt es von der Richtung ab, ob eine Störung weggedämpft wird oder nicht, allerdings wird in der Praxis fast jede Störung zur Divergenz führen, denn nur im linearen Unterraum, der von den Eigenvektoren zu den Eigenwerten mit negativem Realteil aufgespannt wird, werden die Störungen weggedämpft. Eine zufällige Störung wird aber meist sehr schnell aus diesem Unterraum herausführen, so daß dann auch Eigenwerte mit positivem Realteil eine Rolle spielen.

Bei Eigenwerten mit Realteil null reicht die Linearisierung nicht aus, um zu Aussagen über das Stabilitätsverhalten zu kommen, da dann die Terme höherer Ordnung das Geschehen dominieren. Es kann sehr schwer sein, in so einem Fall die Dynamik vorherzusagen.

Abbildung 46 zeigt das Vektorfeld in der Nähe eines stabilen Fixpunkts; alle Lösungskurven laufen auf diesen Punkt zu. Bei einem instabilen Fixpunkt hätten wir dasselbe Bild, nur daß dann alle Pfeile in Gegenrichtung zeigen würden.

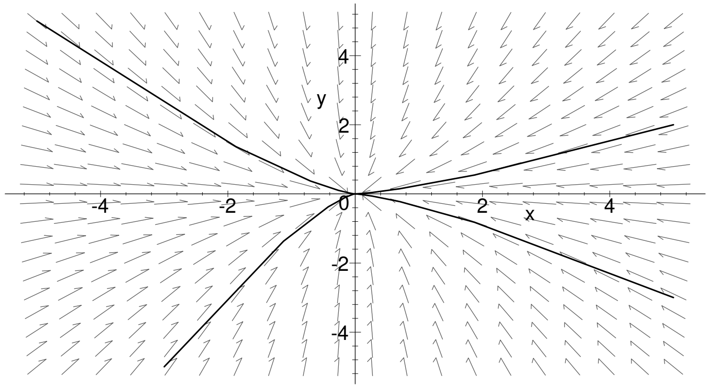


Abb. 46: Die Umgebung eines stabilen Fixpunkts

Auch in Abbildung 47 ist ein stabiler Fixpunkt zu sehen; hier hat aber die JACOBI-Matrix zwei konjugiert komplexe Eigenwerte, so daß sich benachbarte Lösungen spiralförmig auf den Fixpunkt zusammenziehen. Bei einem abstoßenden Fixpunkt hätten wir wieder im wesentlichen dasselbe Bild, aber mit umgedrehten Pfeilen.

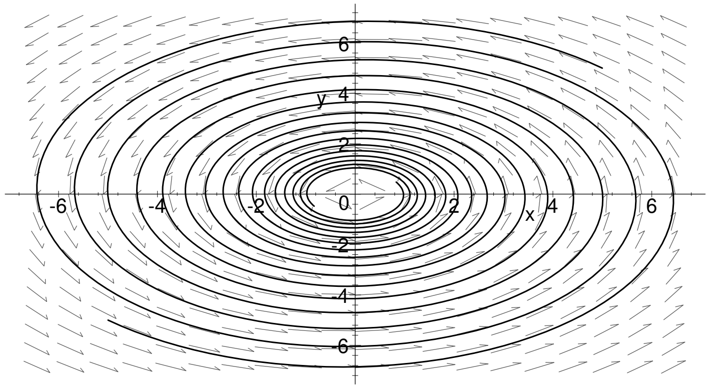


Abb. 47: Zwei konjugiert komplexe Eigenwerte mit negativem Realteil

Abbildung 48 zeigt die Umgebung eines Sattelpunkts; hier haben wir Lösungskurven, die sich zwar asymptotisch der y-Achse annähern, auf dieser aber gegen plus oder minus unendlich gehen.

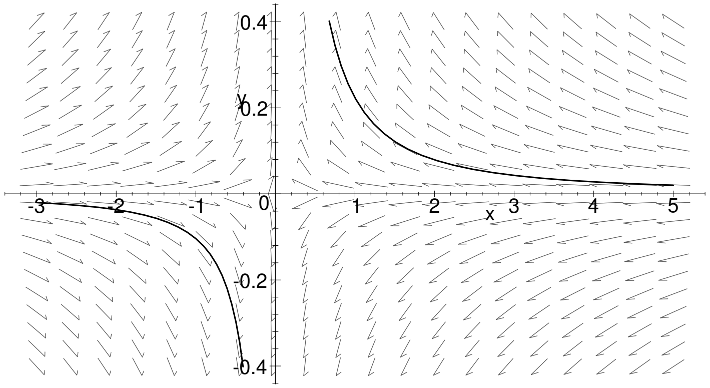


Abb. 48: Umgebung eines Sattelpunkts

Als Beispiel wollen wir die Lösungen der LORENZ-Gleichungen

$$\dot{x}(t) = p\big(y(t) - x(t)\big)$$

$$\dot{y}(t) = rx(t) - y(t) - x(t)z(t)$$

$$\dot{z}(t) = -bz(t) + x(t)y(t)$$

untersuchen. Dieses Differentialgleichungssystem ist eine extreme Vereinfachung der sogenannten NAVIER-STOKES-Gleichung, einer partiellen Differentialgleichung, die Strömungsphänomene beschreibt. Für technische Informatiker interessanter ist wohl, daß dasselbe System nach HAKEN (Phys. Lett. A53 (1975), 77–78) auch das Verhalten von Lasern beschreiben kann.

Die Funktionen $x(t), y(t)$ und $z(t)$ verlieren im Vereinfachungsprozeß ihre unmittelbare physikalische Bedeutung; die Parameter lassen sich allerdings physikalisch interpretieren: Für die atmosphärische Konvektion ist nach LORENZ

$$p = 10, \quad r = 28 \quad \text{und} \quad b = \frac{8}{3}$$

eine sinnvolle Wahl.

EDWARD NORTON LORENZ wurde 1917 im US-Bundesstaat Connecticut geboren; er studierte Mathematik in Dartmouth College (A.B. 1938) und Harvard (M.A. 1940). Nach seinem Kriegsdienst ging er ans MIT, wo er 1948 über Meteorologie promovierte. Sowohl dem MIT, wo er 1981 als Professor emeritiert wurde, als auch der Meteorologie blieb er fortan treu. Zu seinen vielen Auszeichnungen gehört unter anderem der Kyoto-Preis von 1991, der wohl höchstdotierte Wissenschaftspreis.

Da uns der erste Augenschein nichts über das Verhalten der Lösungen zeigt, empfiehlt es sich, daß wir uns durch numerische Simulation einen Eindruck verschaffen. Abbildung 49 zeigt die Lösung des Anfangswertproblems mit $x(0) = 2$ und $y(0) = z(0) = 10$; die meisten werden ähnliche Bilder wohl schon gesehen haben.

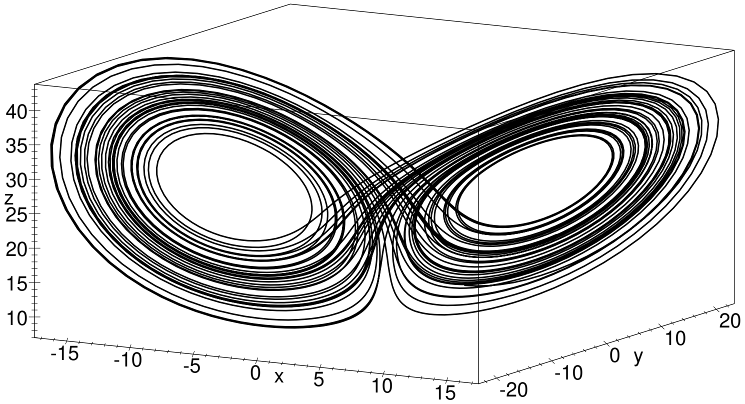


Abb. 49: Eine Bahnkurve des LORENZ-Systems

Leider ist dieses Bild einerseits etwas unübersichtlich, andererseits zeigt es nur eine einzige Lösungskurve. Um besser zu verstehen, was hier passiert, beschränken wir uns auf die Funktion $x(t)$ und betrachten diese für zwei Lösungskurven; Abbildung 50 zeigt die für die Anfangsbedingungen

$$x(0) = 2, \quad y(0) = z(0) = 10 \quad \text{und} \quad x(0) = 2{,}01, \quad y(0) = z(0) = 10\,.$$

Wie man sieht, sind die beiden Lösungskurven bis etwa zum Zeitpunkt $t = 6{,}5$ praktisch ununterscheidbar, danach gehen sie aber recht schnell auseinander und haben ab etwa $t = 10$ nichts mehr miteinander zu tun.

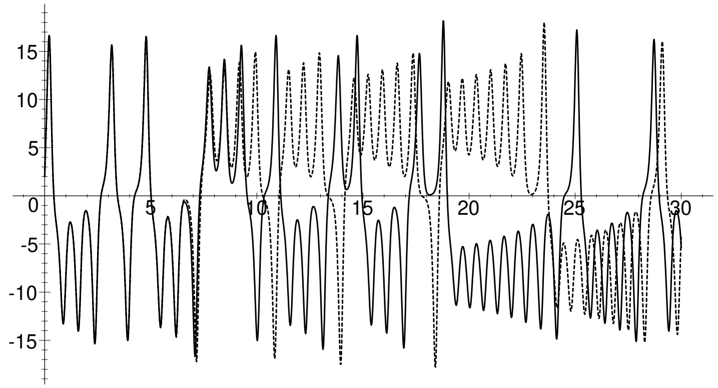


Abb. 50: Die x-Koordinaten zweier Lösungen mit benachbarten Anfangswerten

Fast das gleiche Bild ergibt sich, wenn wir die gestrichelte Kurve nicht mit $x(0) = 2{,}01$ anfangen lassen, sondern – bei sonst unveränderten Werten – bei

$$x(0) = 2{,}000001 = 2 + 10^{-6}\,.$$

Jetzt sind die Kurven zwar bis etwa $t = 16$ praktisch ununterscheidbar, aber spätestens ab etwa $t = 20$ haben sie auch hier nichts mehr miteinander zu tun.

Gerade beim zweiten Fall sollte uns das zu denken geben: Wenn wir Differentialgleichungen zur Vorhersage benutzen, stammen die Anfangsbedingungen im allgemeinen aus einer Messung. Man kann aber nur selten so genau messen, daß sich die beiden Werte 2 und 2,000001 unterscheiden ließen; um eine sinnvolle Voraussage über das Verhalten der Lösung zum Zeitpunkt $t = 20$ zu machen, *muß* man aber nach Abbildung 51 den Wert $x(0)$ mit dieser Genauigkeit kennen.

Es kommt noch schlimmer: In Abbildung 52 ist die dick ausgezogene Kurve wieder eine numerische Simulation der Lösung zu den Anfangs-

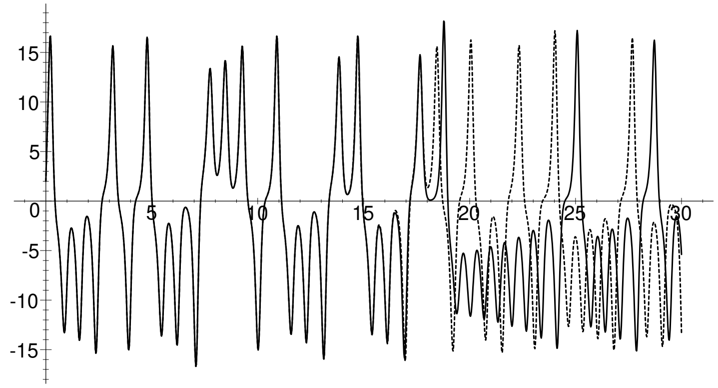


Abb. 51: Effekt einer Störung des Anfangswerts um 10^{-6}

bedingungen $x(0) = 2$ und $y(0) = z(0) = 10$, die gestrichelte Kurve allerdings auch! Die beiden Kurven unterscheiden sich nur dadurch, daß die numerische Simulation bei der dick ausgezogenen Kurve (wie auch bei allen anderen bisherigen Kurven) mit Schrittweite 0,02 arbeitete, wohingegen die Schrittweite für die gestrichelte Kurve mit 0,01 nur halb so groß war. Auch das reicht schon, daß die Kurven ab etwa $t = 10$ nichts mehr miteinander zu tun haben, und damit dürfte wohl auch klar sein, daß keine der bislang betrachteten Kurven für größere Werte von t irgendetwas mit der „wahren“ Lösungsfunktion $x(t)$ zu tun hatte.

LORENZ mußte dieses Verhalten der Lösungen auf die harte Weise lernen: Er fand zu seinem großen Erstaunen, daß sich seine Rechenergebnisse nicht reproduzieren ließen, wenn er Zwischenergebnisse für Kontrollrechnungen nur in gerundeter Form eintippte: Der geringe Rundungsfehler bei der Eingabe des Startwerts reichte bereits aus, um das Langzeitverhalten des Systems grundlegend zu verändern.

Falls das gleiche Phänomen auch in der wirklichen Atmosphäre auftritt, können also minimale Veränderungen etwa des Luftdrucks oder der Temperatur auf längere Sicht zu einer dramatisch anderen Entwicklung des Wetters führen – eine Idee, die vielen Meteorologen damals als zu phantastisch erschien um ernstgenommen zu werden: Am 22. Januar

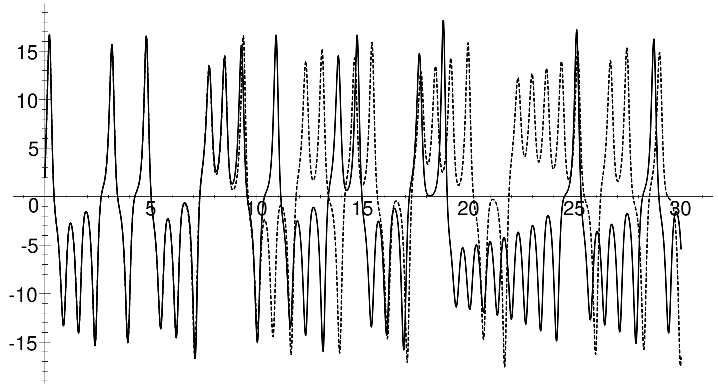


Abb. 52: Effekt einer Schrittweitenhalbierung bei der numerischen Simulation

1963 berichtete LORENZ vor der New York Academy of Sciences über seine Ergebnisse *(Trans. N.Y. Acad. Sci.* **25** *(1963), 409–432)* und schloß seinen Vortrag mit den Worten:

Als die Instabilität eines gleichförmigen Flusses gegenüber infinitesimalen Störungen erstmals als Erklärung für das Auftreten von Zyklonen und Antizyklonen in der Atmosphäre vorgeschlagen wurde, war diese Idee nicht allgemein akzeptiert. Ein Meteorologe bemerkte, daß, falls die Theorie korrekt wäre, ein Flügelschlag einer Möwe ausreichen würde, um die Entwicklung des Wetters für immer zu verändern. Die Kontroverse ist noch nicht entschieden, aber die neueste Evidenz scheint für die Möwen zu sprechen.

Inzwischen ist der Sieg der Möwen bekanntlich allgemein anerkannt; man fordert sogar nicht einmal mehr den relativ kräftigen Flügelschlag einer Möwe, um das Wetter permanent zu verändern: Im Dezember 1972 hielt LORENZ vor der American Association for the Advancement of Sciences in Washington, DC, einen Vortrag mit dem Titel *Predictability: Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil set off a Tornado in Texas,* und seitdem geht das Wort vom *Schmetterlingseffekt* um die Welt.

Auch das Wort *Chaos* wird heute meist auf diese Weise definiert: Kleinste Änderungen bei den Anfangsbedingungen führen zu dramatischen

Veränderungen des Langzeitverhaltens. Allerdings muß man hier aufpassen: Bei der Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = y(t)$$

mit Anfangsbedingungen

$$y(0) = 1 \quad \text{und} \quad y(0) = 1 + \varepsilon$$

unterscheiden sich die Lösungen $y(t) = e^t$ und $y(t) = (1+\varepsilon)\cdot e^t$ zur Zeit t um $\varepsilon \cdot e^t$, was auch bei kleinsten ε-Werten sehr schnell eine sehr große Zahl wird: bei $\varepsilon = 10^{-6}$ und $t = 50$ etwa ist die Differenz bereits größer als $5 \cdot 10^{15}$. Trotzdem wird hier niemand von Chaos reden, denn beide Lösungen gehen sehr schnell gegen den „Gleichgewichtspunkt" unendlich. Von „echtem" Chaos verlangt man daher auch noch, daß die Lösungen nicht gegen eine (endliche oder unendliche) Gleichgewichtslösung konvergieren und auch nicht gegen eine periodische Lösung. Chaos in diesem Sinne ist sehr schwer nachzuweisen; für die LORENZ-Gleichung mit den klassischen Parameterwerten wurde erst Ende September 1999 ein *preprint* veröffentlicht, in dem dies (mit großem theoretischen wie auch rechnerischem Aufwand) gezeigt wird; siehe `http://www.math.gatech.edu/~mischaik/papers/lor3.ps` .

Chaos heißt nun allerdings nicht, daß wir dann überhaupt nichts über das Verhalten der Lösungen aussagen können. Beispielsweise können wir bereits mit unseren einfachen Mitteln zeigen, daß das Bild in Abbildung 49 zumindest qualitativ das Verhalten der Lösungskurven korrekt wiedergibt – quantitativ ist natürlich ab spätestens etwa $t = 10$ alles falsch.

Dazu berechnen wir zunächst die Gleichgewichtslösungen: Im Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 &= p(y-x) \\ 0 &= rx - y - xz \\ 0 &= -bz + xy \end{aligned}$$

zeigt die erste Gleichung, falls wir den uninteressanten Fall $p = 0$ ausschließen, daß die x-Koordinate und die y-Koordinate eines jeden Fixpunkts übereinstimmen müssen.

Falls beide Koordinaten verschwinden, zeigt die dritte Gleichung ($b \neq 0$ vorausgesetzt), daß dann auch die z-Koordinate verschwinden muß; Einsetzen in die Gleichungen zeigt, daß der Nullpunkt in der Tat ein Fixpunkt ist.

Im Fall $x \neq 0$ können wir y in der zweiten Gleichung durch x ersetzen und dann durch x dividieren; dies ergibt die z-Koordinate

$$z = r - 1\,.$$

Damit zeigt die dritte Gleichung, daß es für $r \neq 1$ noch zwei weitere Fixpunkte gibt mit

$$x = y = \pm\sqrt{b(r-1)} \quad \text{und} \quad z = r - 1\,.$$

Die Untersuchung des relativ uninteressanten Nullpunkts sei dem Leser als Übungsaufgabe überlassen; hier seien nur die beiden anderen Fixpunkten betrachtet. Für

$$x = y = \pm\sqrt{b(r-1)} \quad \text{und} \quad z = r - 1$$

führen wir, wie oben im allgemeinen Fall, neue Variablen u, v und w ein, die den Abstand zum Fixpunkt beschreiben, d.h.

$$x = \pm\sqrt{b(r-1)} + u, \quad y = \pm\sqrt{b(r-1)} + v \quad \text{und} \quad z = r - 1 + w\,.$$

Zur Linearisierung in der Nähe des Gleichgewichtspunkt vernachlässigen wir alle nichtlinearen Terme in $u(t)$, $v(t)$ und $w(t)$; das entstehende lineare Differentialgleichungssystem hat dann die JACOBI-Matrix im Fixpunkt als Matrix, ist also

$$\begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \\ \dot{w}(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} -p & p & 0 \\ 1 & -1 & \mp\sqrt{b(r-1)} \\ \pm\sqrt{b(r-1)} & \pm\sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom

$$\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 - (b+1+p)\lambda^2 - b(r-p)\lambda - 2pb(r-1)$$

ist für beide Fixpunkte dasselbe, verleitet aber nicht dazu, es allgemein lösen zu wollen. Wir setzen daher die von LORENZ vorgeschlagenen speziellen Parameterwerte ein und erhalten

$$-\lambda^3 - \frac{41}{3}\lambda^2 - \frac{304}{3}\lambda - 1440\,,$$

was immer noch so schlimm ist, daß wir es besser numerisch lösen. Die drei Lösungen ergeben sich näherungsweise als

$$-13{,}85457791 \quad \text{und} \quad 0{,}09395562396 \pm 10{,}19450522i\,.$$

Es gibt also einen negativen Eigenwert und zwei konjugiert komplexe Eigenwerte mit positivem Realteil. Damit ist klar, wie Lösungskurven des linearisierten Systems in der Nähe der beiden Fixpunkte aussehen: Der negative Eigenwert sorgt dafür, daß die Lösungen asymptotisch in die Ebene gedrückt werden, die von den Eigenvektoren zu den beiden anderen Eigenwerten aufgespannt wird, und die beiden komplexen Eigenwerte sorgen dafür, daß sie dort spiralförmig nach außen gehen.

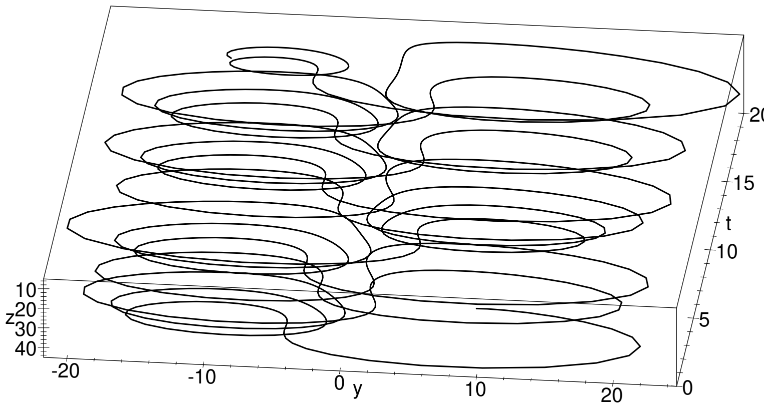


Abb. 53: y- und z-Koordinate als Funktion von t

Damit wird das Verhalten des LORENZ-Systems klar: Wir haben zwei Ebenen, die jeweils einen Sattelpunkt enthalten; kommt eine Lösung in die Nähe eines solchen Sattelpunkts, wird sie von der entsprechenden

Ebenen eingefangen und geht dort spiralförmig nach außen. Wenn sie sich hinreichend weit vom Sattelpunkt entfernt hat, sind die Voraussetzungen für die obige Linearisierung nicht mehr gegeben; die Lösung kann daher der Ebenen entkommen, wird aber über kurz oder lang von der Ebenen des anderen Sattelpunkts eingefangen und so weiter. Abbildung 53 zeigt dieses Verhalten etwas klarer als Abbildung 49: Hier sind die die y- und die z-Koordinate der Lösungskurve über der Zeit aufgetragen.