

Abb. 21: Die Funktion  $\cos(t) + 3e^{-t/6} \sin 5t$

ist. Diese Funktion sieht so ähnlich aus wie die Ableitung von  $1/(s^2 + \omega_0^2)$ ; in der Tat ist

$$\frac{cs}{(s^2 + \omega_0^2)^2} = \frac{d}{ds} \frac{-c/2}{s^2 + \omega_0^2}$$

Die Funktion, die hier abgeleitet wird, ist die LAPLACE-Transformierte von

$$f(t) = -\frac{c}{2\omega_0} \sin \omega_0 t,$$

und nach Aussage b) des Lemmas aus §6a ist (sofern das Integral absolut konvergiert) allgemein

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \frac{d}{ds} \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt = \int_0^\infty \frac{d}{ds} f(t)e^{-st} dt \\ &= \int_0^\infty f(t) \cdot (-t) \cdot e^{-st} dt = \mathcal{L}\{-tf(t)\}(s). \end{aligned}$$

Also ist

$$\frac{cs}{(s^2 + \omega_0^2)^2} = \mathcal{L}\left\{ \frac{c}{2\omega_0} \cdot t \sin \omega_0 t \right\}(s),$$

und wir haben auch diesen Fall gelöst. Die Funktion  $t \sin \omega_0 t$  ist in Abbildung 22 zu sehen; ihre Amplitude steigt immer weiter an.

Da unbegrenzt ansteigende Funktionen in Anwendungen selten etwas gutes bedeuten, spricht man hier von einer *Resonanzkatastrophe*: Die

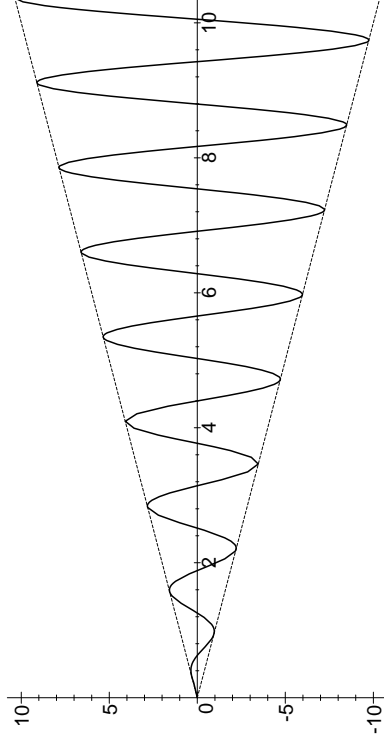


Abb. 22: Die Funktion  $t \sin 5t$

erregende Schwingung hat dieselbe Frequenz wie der Schwingkreis, und das führt, bei Abwesenheit einer jeglichen Dämpfung, zu einer katastrophalen Aufschaukelung. Auch bei Dämpfung ist Resonanz zu beobachten: Die oben berechneten Koeffizienten  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , haben allesamt den Nenner

$$(\sigma - \omega_0^2)^2 + \rho^2 \omega_0^2,$$

werden also umso größer, je näher  $\sigma$  bei  $\omega_0^2$  liegt, jedoch verhindert der Dämpfungsterm  $\rho$ , daß der Nenner je wirklich verschwindet. Bei kleinem  $\rho$  kann die Resonanz bei und um  $\sigma = \omega_0^2$  allerdings in der Praxis trotzdem problematisch und in Extremfällen sogar katastrophal sein.

Mit den Formeln, die schon haben, könnten wir nun leicht die vollständigen Lösungen für jeden der behandelten Fälle hinschreiben, aber die bisherige Diskussion zeigt, daß das doch zu sehr langen Formeln führen würde. Die LAPLACE-Transformation ist zwar sehr gut geeignet, um die Lösung eines konkreten Anfangswertproblems hinzuschreiben – dann sind  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  keine komplizierten Ausdrücke, sondern einfach reelle Zahlen –, aber für abstraktere Überlegungen führt sie zu eher unübersichtlichen Ergebnissen. Wir werden daher im nächsten Kapitel alternative Methoden kennenlernen, die mehr über die Struktur der Lösungen von Differentialgleichungen aussagen.

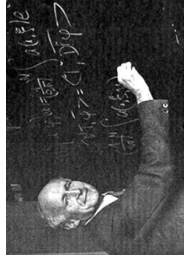
**§7: Die Fourier-Transformation auf dem Schwartz-Raum**  
**a) Der Schwartz-Raum der stark abfallenden Funktionen**

Wie die Beispiele aus §5 zeigen, ist die Existenz von FOURIER- und LAPLACE-Transformationen alles andere als sicher. In diesem Abschnitt wollen wir eine Klasse von Funktionen betrachten, für die es garantiert keine Probleme mit der Existenz der Integrale gibt, und wir wollen für diese Funktionen weitere Eigenschaften von FOURIER- und LAPLACE-Transformation herleiten. In späteren Abschnitten werden wir diese Ergebnisse dann verallgemeinern auf die Funktionen, die uns wirklich interessieren.

**Definition:** Eine Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *stark abfallend*, wenn sie beliebig oft stetig differenzierbar ist und die Funktionen

$$t \mapsto |t^r f^{(k)}(t)|$$

für alle  $k, r \geq 0$  beschränkt sind. Die Menge aller stark abfallender Funktionen bezeichnen wir als SCHWARTZ-Raum  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .



LAURENT SCHWARTZ (1915–2002) wurde in Paris geboren, studierte zunächst an der dortigen Ecole Normale Supérieure, dann an der Universität Strabburg. 1945 wurde er Professor in Nancy und entwickelte dort die mathematische Theorie der bislang nur von Physikern wie DIRAC und HEAVISIDE betrachteten Distributionen. Für diese Arbeiten wurde er 1950 mit der Fields Medal ausgezeichnet, dem bedeutendsten Preis in der Mathematik. Von 1953 bis zu seiner Emeritierung 1983 lehrte er in Paris.

Es ist klar, daß auch Summen und skalare Vielfache von stark abfallenden Funktionen stark abfallend sind; der SCHWARTZ-Raum  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  ist daher ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum.

**Beispiele:** a) Die Funktion  $f(t) = e^{-t^2}$  liegt in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ : Sie ist beliebig oft stetig differenzierbar; ihre Ableitungen haben jeweils die Form  $P(t)e^{-t^2}$  mit einem geeigneten Polynom  $P$ . Da die Exponentialfunktion schneller wächst als jedes Polynom, geht  $e^{-t^2}$  schneller gegen Null als ein Polynom gegen unendlich gehen kann, das Produkt geht also für  $t \rightarrow \pm\infty$  gegen Null und ist daher auf ganz  $\mathbb{R}$  beschränkt.

b) Sei

$$f(t) = \begin{cases} \frac{-1}{e(t-a)(b-t)} & \text{falls } a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Da diese Funktion außerhalb des Intervalls  $(a, b)$  verschwindet und im Innern stetig ist, ist sie natürlich beschränkt. Ihre Ableitungen sind Produkte aus rationalen Funktionen mit  $f$  selbst; da  $f(t)$  für  $t \rightarrow a$  oder  $t \rightarrow b$  erheblich schneller gegen null geht als eine rationale Funktion gegen unendlich gehen kann, haben alle Ableitungen an den Intervallgrenzen den Wert null; die Funktion ist also beliebig oft stetig differenzierbar. Die Beschränktheitsbedingungen sind problemlos: Im kompakten Intervall  $[a, b]$  ist jede stetige Funktion beschränkt, und außerhalb sind alle hier betrachteten Funktionen null.

Ein erster Hinweis darauf, daß wir in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  nur selten Probleme mit der Existenz von Integralen haben dürften, gibt das folgende

**Lemma:** a) Für eine Funktion  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  existieren

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{f(t)} dt.$$

b) Für  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  und  $\omega \in \mathbb{R}$  existiert das FOURIER-Integral

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt;$$

für  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  und  $t \in \mathbb{R}$  existiert das inverse FOURIER-Integral

$$\check{g}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{i\omega t} d\omega.$$

c) Die Abbildung

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C} \\ (f, g) \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)} dt \end{array} \right.$$

macht  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  zu einem HERMITESchen Vektorraum.

*Beweis:* a) Da sowohl  $f(t)$  als auch  $t^2 f(t)$  beschränkt sind, ist auch  $(1+t^2)f(t)$  beschränkt, es gibt also eine Konstante  $C \in \mathbb{R}$ , so daß

$$|f(t)| \leq \frac{C}{1+t^2} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Da das uneigentliche Integral

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} &= \lim_{a,b \rightarrow \infty} \int_{-a}^b \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{a,b \rightarrow \infty} (\arctan b - \arctan(-a)) \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$

konvergiert, ist es eine konvergente Majorante des Integrals über  $f$ , so daß nach dem Majorantenkriterium auch das letztere konvergiert. Damit ist auch  $b)$  bewiesen, d.h. die Konvergenz aller Integrale  $\tilde{f}(\omega)$  und  $\check{g}(t)$ , denn da  $e^{\pm i\omega t}$  den Betrag eins hat, ist auch für jedes  $\omega \in \mathbb{R}$  bzw.  $t \in \mathbb{R}$

$$|f(t)| = |f(t) \cdot e^{-i\omega t}| \leq \frac{C}{1+t^2}$$

bzw.

$$|g(\omega)| = |g(\omega) \cdot e^{i\omega t}| \leq \frac{C}{1+\omega^2}.$$

Genauso läßt sich auch das Integral über  $f(t)\overline{f(t)}$  abschätzen, denn da  $|f(t)|$  beschränkt ist, ist auch  $|t^2 f(t)\overline{f(t)}|$  und damit  $(1+t^2)f(t)\overline{f(t)}$  beschränkt. (Betragsstriche sind hier natürlich überflüssig.)

b) Wie wir gerade gesehen haben, konvergiert das rechtsstehende Integral im Spezialfall  $f = g$ . Für beliebiges  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  und beliebige reelle Zahlen  $a \leq b$  gilt nach der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung in der etwas allgemeineren Form aus [HMI], Kap. I, §6c)

$$\left| \int_a^b f(t)\overline{g(t)} dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt} \cdot \sqrt{\int_a^b |g(t)|^2 dt},$$

und somit konvergiert mit der rechten Seite auch die linke für  $a \rightarrow -\infty$  und  $b \rightarrow \infty$ .

Die Eigenschaften eines HERMITESchen Skalarprodukts sind klar bis auf die Eigenschaft, daß nur die Nullfunktion Skalarprodukt null mit sich selbst haben darf, aber da wir es hier mit beliebig oft stetig differenzierbaren und damit insbesondere stetigen Funktionen zu tun haben, folgt dies genauso wie in [HMI], Kap. I, §6a) für das Skalarprodukt auf dem Vektorraum aller stetiger Funktionen  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . ■

Da mit einer Funktion  $f$  auch alle deren Ableitungen sowie ihre Produkte mit Polynomen stark abfallend sind, gelten im übrigen auch die Formeln aus dem letzten Paragraphen über FOURIER-Transformationen und Ableitungen, ohne daß wir uns über die dort notwendigen, für Funktionen aus dem SCHWARTZ-Raum aber automatisch erfüllten Zusatzvoraussetzungen Gedanken machen müßten.

## b) Die Fourier-Transformierte der Gauß-Funktion

Ein wesentliches Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis, daß zumindest auf dem SCHWARTZ-Raum die inverse FOURIER-Transformation wirklich invers zur FOURIER-Transformation ist. Die Strategie ist folgende: Wir zeigen zunächst, daß dies für *eine* spezielle Funktion  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  gilt, und folgern daraus in einem zweiten Schritt, daß dies für *alle*  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  der Fall ist.

Für die eine spezielle Funktion aus  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  haben wir nicht viel Auswahl: Wir kennen bislang im wesentlichen nur zwei Beispiele, nämlich  $f(t) = e^{-t^2}$  und  $f(t) = e^{-1/(t-a)(b-t)}$  auf  $(a, b)$  und null sonst. Da das erste Beispiel etwas harmloser aussieht, nehmen wir dieses, und da es den Aufwand kaum vergrößert, später aber nützlich sein wird, verallgemeinern wir es leicht zu

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \quad \text{mit } \sigma \in \mathbb{R}.$$

Diese Funktion heißt GAUSS-Funktion mit Varianz  $\sigma^2$ ; ihr Graph wird auch als *Glockenkurve* bezeichnet. Abbildung 23 zeigt die Kurven für

$\sigma = 1/2$  (gepunktet),  $\sigma = 1$  (ausgezogen) und  $\sigma = 2$  (gestrichelt); wie man sieht, wird die Kurve flacher für größere  $\sigma$ , wohingegen kleine  $\sigma$  zu einem schärfer ausgeprägten Maximum führen. Im Zusammenhang mit der Fehlerrechnung und Statistik werden uns am Ende des Semesters noch genauer mit dieser Funktion beschäftigen.

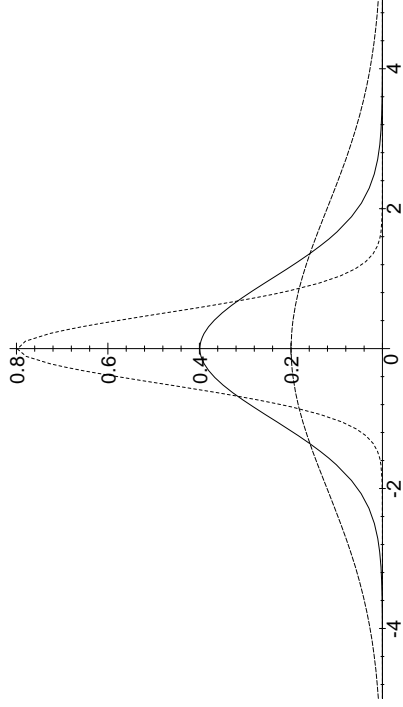


Abb. 23: Gaußkurven für  $\sigma = \frac{1}{2}, 1$  und  $2$

Nach Definition ist

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} e^{-i\omega t} dt,$$

aber da schon die Stammfunktion von  $e^{-t^2}$  nicht elementar ausdrückbar ist, haben wir sicherlich wenig Chancen, dieses Integral über eine Stammfunktion zu berechnen.

Das Lemma aus dem vorigen Abschnitt erlaubt uns aber, Aussagen über die Ableitung von  $\hat{f}(\omega)$  machen:

$$\frac{d\hat{f}}{d\omega}(\omega) = (-i) \cdot t\hat{f}(\omega) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} e^{-i\omega t} dt.$$

Der neue Integrand ist ziemlich ähnlich zur Ableitung des alten, denn

$$\frac{d}{dt} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2} - i\omega t} = -\left(\frac{t}{\sigma^2} + i\omega\right) e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2} - i\omega t}$$

oder

$$\frac{d}{dt} \left( -\sigma^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2} - i\omega t} \right) = (t + i\omega\sigma^2) e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2} - i\omega t}.$$

Die Funktion, die hier abgeleitet wird, geht für  $t \rightarrow \pm\infty$  gegen null, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} (t + i\omega\sigma^2) e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2} - i\omega t} dt = -\sigma^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2} - i\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0,$$

und damit ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2} - i\omega t} dt = -i\omega\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2} - i\omega t} dt.$$

Die Ableitung von  $\hat{f}(\omega)$  ist daher

$$\frac{d\hat{f}}{d\omega}(\omega) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}\sigma} (-i\omega\sigma^2) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2} - i\omega t} dt = -\omega\sigma^2 \cdot \hat{f}(\omega).$$

Somit ist  $\hat{f}(\omega)$  eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d\hat{f}}{d\omega}(\omega) = -\omega\sigma^2 \cdot \hat{f}(\omega).$$

Diese Differentialgleichung hat auch die Lösung

$$g(\omega) = e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}},$$

wie man durch Differenzieren von  $g(\omega)$  leicht nachrechnet, und für den Quotienten dieser beiden Lösungen ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \left( \frac{\hat{f}(\omega)}{g(\omega)} \right) &= \frac{d}{d\omega} \left( \hat{f}(\omega) e^{\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} \right) \\ &= \frac{d\hat{f}}{d\omega}(\omega) \cdot e^{\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} + \hat{f}(\omega) \cdot \sigma^2 \omega e^{\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} \\ &= -\omega\sigma^2 \hat{f}(\omega) e^{\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} + \omega\sigma^2 \hat{f}(\omega) e^{\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} = 0. \end{aligned}$$

Also ist der Quotient eine Konstante, d.h.

$$\hat{f}(\omega) = \hat{f}(0) \cdot e^{-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2}}.$$

Damit ist uns die FOURIER-Transformierte von  $f$  bekannt bis auf die Konstante

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt.$$

In [HM1], Kap. 2, §6c) hatten wir auf dem Umweg über ein zweidimensionales Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

berechnet; über die Substitution  $u = t/\sqrt{2}\sigma$  folgt daraus sofort

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = 1.$$

Als Endergebnis erhalten wir somit

$$\hat{f}(\omega) = e^{-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1/\sigma)} e^{-\frac{\omega^2}{2(1/\sigma)^2}},$$

wobei die kompliziertere zweite Form zeigt, daß es sich abgesehen vom Vorfaktor  $\sqrt{2\pi}/\sigma$  wieder um eine GAUSS-Funktion handelt, allerdings mit Varianz  $1/\sigma^2$ .

Mit der Abkürzung

$$N_{\sigma}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

können wir kurz schreiben

$$\hat{N}_{\sigma}(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} N_{1/\sigma}(\omega).$$

Damit kennen wir natürlich auch die inverse FOURIER-Transformierte einer GAUSS-Funktion, denn nach den allgemeinen Rechenregeln ist

$$\check{N}_{\sigma}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \hat{N}_{\sigma}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} N_{\frac{1}{\sigma}}(\omega).$$

Insbesondere können wir damit nachrechnen, daß die *inverse* FOURIER-Transformation zumindest in diesem Beispiel tatsächlich invers zur FOURIER-Transformation ist, d.h.

$$\check{N}_{\sigma}(t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} \check{N}_{\frac{1}{\sigma}}(t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{1}{\sigma}}} N_{\sigma}(t) = N_{\sigma}(t).$$

Genauso zeigt man, daß auch

$$\hat{\check{N}}_{\sigma(t)} = N_{\sigma}(t)$$

ist; die beiden Transformationen sind hier also in der Tat invers zueinander.

### c) Die Umkehrung der Fourier-Transformation

Wie angekündigt, soll aus dem Beispiel des vorigen Abschnitts nun in einem zweiten Schritt gefolgert werden, daß dies nicht nur für die Funktionen  $N_{\sigma}$  gilt, sondern für *alle* Funktionen aus  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , d.h.

**Satz:** Die FOURIER-Transformation und die inverse FOURIER-Transformation definieren zueinander inverse lineare Abbildungen

$$\begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) & \text{und} & \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ f \mapsto \hat{f} & \text{und} & g \mapsto \check{g} \end{cases} \end{cases}$$

Insbesondere sind also beide Abbildungen Isomorphismen, und für alle  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  ist

$$\check{\check{f}}(t) = f(t).$$

Für das HERMITESCHE Skalarprodukt auf  $\mathcal{S}^2(\mathbb{R})$  gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \check{f}(\omega) \overline{\check{g}(\omega)} d\omega,$$

und damit insbesondere auch

$$\|f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\hat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi} \|\check{f}\|_2 \quad \text{mit} \quad \|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

*Beweis:* Die Linearität ist, wie bei jedem Integral, klar; das Problem ist, ob  $\hat{f}$  und  $\check{g}$  stark abfallend sind. Betrachten wir zunächst nur die Produkte  $\omega^r \hat{f}(\omega)$ . Für diese ist

$$\begin{aligned} \left| \omega^r \hat{f}(\omega) \right| &= \left| (-i)^r \widehat{f^{(r)}}(\omega) \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f^{(r)}(t) e^{-i\omega t} dt \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(r)}(t)| dt < \infty, \end{aligned}$$

da  $f$  stark abfallend ist. Für

$$\omega^r \check{f}^{(k)}(\omega) = \omega^r (-i)^k \widehat{t^k f}(\omega)$$

können wir genauso argumentieren, und wegen des Zusammenhangs zwischen FOURIER-Transformation und inverser FOURIER-Transformation folgt daraus auch das Ergebnis für  $\check{g}$ .

Als nächstes wollen wir uns überlegen, daß für  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\check{\check{f}}(t) = f(t)$$

ist. Dazu benutzen wir zwei zunächst beliebige weitere Funktionen  $g, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , die wir im Laufe der Rechnung nach Bedarf genauer festlegen werden.

Nach Definition ist

$$\check{\check{f}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega;$$

wir betrachten das etwas allgemeinere Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} g(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\omega s} ds \right) e^{i\omega t} g(\omega) d\omega,$$

das wir nach dem Satz von FUBINI weiter ausrechnen können als

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s) \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{-i\omega(s-t)} d\omega \right) ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \check{g}(s-t) ds.$$

Nun sei  $a$  eine positive reelle Konstante und  $g(\omega) = h(a\omega)$ , wobei die Funktion  $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  im Augenblick noch beliebig ist. Dann führt die Substitution  $\nu = a\omega$  auf

$$\begin{aligned} \check{g}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(a\omega) e^{-i\omega s} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} h(\nu) e^{-i\nu \frac{s}{a}} \frac{d\nu}{a} \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} h(\nu) e^{-i\nu \frac{s}{a}} d\nu = \frac{1}{a} \widehat{h}\left(\frac{s}{a}\right). \end{aligned}$$

und nach obiger Rechnung ist daher

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} h(a\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \cdot \frac{1}{a} \widehat{h}\left(\frac{s-t}{a}\right) ds.$$

Mit der neuen Variablen

$$u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{s-t}{a}$$

ist  $s = t + au$ , und wir können diese Formel auch kürzer schreiben als

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} h(a\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+au) \cdot \widehat{h}(u) du.$$

Beide Seiten sind stetig in  $a$ ; für  $a \rightarrow 0$  erhalten wir auf der linken Seite

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} h(0) d\omega = h(0) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = 2\pi \cdot h(0) \cdot \check{\check{f}}(t)$$

und rechts

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \widehat{h}(u) du = f(t) \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(u) du = 2\pi \cdot f(t) \cdot \check{\check{h}}(0).$$

Also ist für zwei beliebige Funktionen  $f, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  stets

$$h(0) \cdot \check{f}(t) = f(t) \cdot \check{h}(0).$$

Setzen wir nun für  $h$  speziell eine GAUSS-Funktion ein, etwa

$$h(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{2}},$$

so wissen wir bereits aus dem obigem Beispiel, daß  $\check{h}$  und  $h$  übereinstimmen; insbesondere haben beide an der Stelle  $\omega = 0$  den von null verschiedenen Wert  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ , so daß wir durch diesen Wert dividieren können und die gewünschte Formel

$$\check{f}(t) = f(t)$$

erhalten. Wegen der Beziehungen

$$\widehat{f}(\omega) = 2\pi \check{f}(-\omega) \quad \text{und} \quad \check{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \widehat{f}(-\omega)$$

ist dann auch

$$\check{\widehat{f}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi f(-(-\omega)) = f(\omega).$$

Zu beweisen bleibt noch, daß die beiden Transformationen auch das HERMITESCHE Skalarprodukt auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  respektieren. Dazu wiederholen wir einfach die Rechnung zu Beginn des Beweises ohne den Faktor  $e^{i\omega t}$ . Für eine beliebige Funktion  $g(\omega)$  aus  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) g(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right) g(\omega) d\omega$$

nach dem Satz von FUBINI gleich

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \widehat{g}(t) dt,$$

wir haben also die Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) g(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \widehat{g}(t) dt. \quad (*)$$

Um daraus Aussagen über das HERMITESCHE Skalarprodukt herzuleiten, benutzen wir die Beziehungen

$$\widehat{\check{f}}(t) = 2\pi \check{f}(-t) = 2\pi f(-t) \quad \text{oder} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \widehat{\check{f}}(-t) \quad (**)$$

und

$$\begin{aligned} \check{\widehat{g}}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(t) e^{i\omega t} dt \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(-t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(-t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \widehat{\check{g}}(-\omega), \end{aligned} \quad (***)$$

wobei der Übersichtlichkeit halber  $\check{g}$  für diejenige Funktion steht, die jedem Wert  $t$  den Funktionswert  $\widehat{g}(t) = \check{g}(t)$  zuordnet; entsprechend ist  $\check{\widehat{g}}(t) = \widehat{g}(t)$ .

Damit läßt sich das HERMITESCHE Skalarprodukt folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} (f, g) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\widehat{g}(t)} dt = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\check{f}}(-t) \widehat{\check{g}}(-t) dt \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\check{f}}(-t) \widehat{\check{g}}(-t) dt = \frac{1}{4\pi^2} \cdot 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t) \widehat{g}(-t) dt \\ &\stackrel{(***)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t) \overline{\widehat{g}(t)} dt = \frac{1}{2\pi} (\widehat{f}, \widehat{g}). \end{aligned}$$

Die Aussage über das Produkt der inversen FOURIER-Transformierten folgt nun einfach daraus, daß die beiden Transformationen zueinander invers sind:

$$(\check{f}, \check{g}) = \frac{1}{2\pi} (\widehat{f}, \widehat{g}) = \frac{1}{2\pi} (f, g). \quad \blacksquare$$