§5: Fourier- und Laplace-Transformationen

In den vorigen Paragraphen haben wir periodische Funktionen mittels ihrer FOURIER-Reihen als Überlagerungen reiner Schwingungen dargestellt. Diese Zerlegung einer Funktion in Sinus- und Cosinusschwingungen verschiedener Frequenzen ist nicht nur für periodische Funktionen nützlich; angesichts der Tatsache, daß das Verhalten vieler elektronischer Bauteile von der Frequenz abhängt, würde man gerne *jede* Funktion entsprechend zerlegen. Es ist allerdings klar, daß FOURIER-Reihen, wie wir sie bislang kennen, dazu nicht geeignet sind: Da dort alle beteiligten Frequenzen Vielfache eine festen Grundfrequenz sind, muß auch die Summe mindestens die der Grundfrequenz entsprechende Periode haben.

Daher brauchen wir für nichtperiodische Funktionen im Allgemeinen ein kontinuierliches Frequenzspektrum; dieses liefert uns für hinreichend gutartige Funktionen die FOURIER-Transformation. Die LAPLACE-Transformation ist eine Variante davon, die zwar inhaltlich etwas schwerer zu interpretieren ist als die FOURIER-Transformation, die dafür aber für größere Funktionenklassen existiert und rechnerisch besser handhabbar ist; außerdem gibt es zur LAPLACE-Transformation sehr viel ausführlichere Tabellen als zur FOURIER-Transformation

a) Fourier-Reihen und Fourier-Integrale

Zur Konstruktion der FOURIER-Transformation gehen wir aus von FOURIER-Reihen:

Für eine beliebige reelle Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wählen wir dazu zunächst eine (große) Periode T und betrachten die Funktion $f_T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die auf dem Intervall $(-T/2, T/2]$ mit f übereinstimmt und dann periodisch mit Periode T auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt wird. Mit $\omega = 2\pi/T$ ist die FOURIER-Reihe von f_T gleich

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ki\omega t} \quad \text{mit} \quad c_k = \widehat{f}_T(k) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-ki\omega t}\,dt\,.$$

Um f selbst darzustellen, müssen wir T gegen unendlich gehen lassen; um das Verhalten von c_k bei Veränderung von T kontrollieren zu können, definieren wir dazu eine Funktion $C(\nu)$ als

$$C(\nu) \underset{\text{def}}{=} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-i\nu t}\,dt\,.$$

Mit dieser Definition ist

$$c_k = \frac{1}{T}C(k\omega) = \frac{\omega}{2\pi}C(k\omega)\,,$$

und die FOURIER-Reihe von f_T läßt sich schreiben als

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} C(k\omega)e^{i(k\omega)t}\omega\,.$$

Wäre dies eine endliche Summe, etwa

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N}^{N} C(k\omega)e^{i(k\omega)t}\omega\,,$$

so könnten wir sie auffassen als RIEMANN-Summe für

$$\int_{-N\omega}^{(N+1)\omega} \frac{1}{2\pi}C(\nu)e^{i\nu t}\,d\nu$$

bei einer äquidistanten Unterteilung mit Intervallbreite ω. Falls also ω gegen Null geht (und damit $T = 2\pi/\omega$ gegen unendlich) und gleichzeitig N gegen unendlich, konvergiert die FOURIER-Reihe gegen das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}C(\nu)e^{i\nu t}\,d\nu = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C(\nu)e^{i\nu t}\,d\nu\,,$$

sofern dieses existiert. Im Idealfall sollte also gelten

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C(\nu)e^{i\nu t}\,d\nu \quad \text{mit} \quad C(\nu) \underset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\nu t}\,dt\,.$$

Um dies genauer zu untersuchen, geben wir diesen Konstruktionen Namen:

Definition: Für $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ bezeichnen wir die Funktion

$$\widehat{f}:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{C}\\ \omega\mapsto\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt\end{cases},$$

so sie existiert, als FOURIER-Transformierte von f.

Damit sollte dann also gelten

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega\,,$$

und diese Konstruktion, die f aus $\widehat{f}$ rekonstruiert, heißt *inverse* FOURIER-*Transformation:*

Definition: Für $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ bezeichnen wir die Funktion

$$\check{g}:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{C}\\ t\mapsto\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega\end{cases}$$

als inverse FOURIER-Transformierte von g.

Offensichtlich ist

$$\check{f}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\widehat{f}(-\omega)\quad\text{und}\quad\widehat{g}(t)=2\pi\check{g}(-t)\,.$$

Je nach Buch oder Vorlesung werden die Vorfaktoren gelegentlich auch anders gewählt, beispielsweise stand in der HM II bis 1998 der Faktor $1/2\pi$ vor der FOURIER-Transformation selbst statt vor ihrer inversen.

Die jetzt gewählte Definition paßt besser zu der aus der hiesigen Elektrotechnik; dort wird die FOURIER-Transformation als

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

definiert, wobei j, wie in der Elektrotechnik üblich, für die in der Mathematik und Physik mit i bezeichnete imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ steht. Demnach ist also $F(j\omega)=\widehat{f}(\omega)$.

Einige Autoren bevorzugen es auch, aus Symmetriegründen bei beiden Transformationen einen Vorfaktor $1/\sqrt{2\pi}$ zu verwenden, so daß je nach Buch durchaus sehr verschiedene Dinge gemeint sein können, wenn von „der“ FOURIER-Transformation und ihrer Umkehrung die Rede ist. In allen Fällen sind die Faktoren aber so aufeinander abgestimmt, daß für hinreichend gutartige Funktionen die Beziehungen

$$\check{\widehat{f}}(t)=f(t)\quad\text{und}\quad\widehat{\check{f}}(t)=f(t)$$

gelten.

b) Die Laplace-Transformation

Die Existenz der FOURIER-Transformierten, d.h. die Konvergenz des uneigentlichen Integrals aus der Definition, sowie auch die obigen Formeln für $\check{\widehat{f}}$ und $\widehat{\check{f}}$ sind leider alles andere als selbstverständlich: Für $f(t)=1$ oder auch $f(t)=e^{i\omega t}$ oder $f(t)=t^n$ und in vielen weiteren Fällen kann das Integral für $\widehat{f}(\omega)$ schon aus ganz trivialen Gründen nicht existieren.

Offensichtlich hat das FOURIER-Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

Konvergenzprobleme sowohl an der oberen als auch an der unteren Grenze. Bei vielen Anwendung interessieren Funktionen vor allem für positive Werte von t (die „Zukunft“), während negative Werte (die „Vergangenheit“) vernachlässigt werden können. Um daher eine gegebene

Funktion f so abzuändern, daß das FOURIER-Integral an der unteren Grenze keine Konvergenzprobleme mehr hat, setzen wir sie für $t < 0$ einfach auf null.

Für positive t dürfen wir nicht so radikal vorgehen; schließlich soll das Ergebnis noch etwas mit der Funktion f zu tun haben. Deshalb dämpfen wir hier die Funktion nur durch eine Exponentialfunktion. Insgesamt betrachten wir also anstelle von $f(t)$ die Funktion

$$g_r(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ f(t)e^{-rt} & \text{für } t > 0 \end{cases}.$$

Den Funktionswert an der Stelle 0 legen wir so fest, daß die Funktion dort rechtsseitig stetig ist, d.h.

$$g(0) = f(0^+) = \lim_{t\to 0+} f(t)\,.$$

Die FOURIER-Transformierte dieser Funktion g_r bezeichnen wir, wenn sie existiert, als LAPLACE-Transformierte von f an der Stelle $s = r + i\omega$, in Zeichen

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) \underset{\text{def}}{=} \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt\,.$$

Für gängige Funktionen f ist $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ ist den meisten Formelsammlungen zu finden; es gibt auch umfangreiche Tabellenwerke, die ausschließlich der LAPLACE-Transformation gewidmet sind. Im allgemeinen wird sie nur für hinreichend große Werte von $r = \mathfrak{Re}\, s$ existieren.

Die inverse LAPLACE-Transformation läßt sich aus der inversen FOURIER-Transformation ableiten: Wegen $\mathcal{L}\{f(t)\}(r + i\omega) = \widehat{g}_r(t)$ sollte $g_r(t)$ die inverse FOURIER-Transformierte von $\mathcal{L}\{f(t)\}(r + i\omega)$ sein; für $t > 0$ sollte daher

$$f(t) = e^{rt} g_r(t) = \frac{e^{rt}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}\{f(t)\}(r + i\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

sein. Für $t < 0$ können wir natürlich keine entsprechende Formel erwarten, da die Funktionswerte von f auf der negativen Achse bei der Berechnung der LAPLACE-Transformation ignoriert werden.

c) Erste Eigenschaften und erste Beispiele

Als erstes Beispiel betrachten wir die Funktion $f(t) = \sin\omega t$. Ihr FOURIER-Integral

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin\omega t\, e^{-i\omega t}\,dt$$

ist ein unendliches Integral über eine periodische Funktion, existiert also nicht. Das LAPLACE-Integral

$$\mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) = \int_0^\infty \sin\omega t\, e^{-st}\,dt$$

existiert für rein imaginäres $s = i\omega$ aus dem gleichen Grund nicht, und für ein s mit negativem Realteil kann es natürlich schon gar nicht existieren. Ist aber $\mathfrak{Re}\, s > 0$, so liefert die Regel für partielle Integration

$$\mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) = \int_0^\infty \sin\omega t\, e^{-st}\,dt = \sin\omega t \frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_0^\infty - \int_0^\infty \omega\cos\omega t \frac{e^{-st}}{-s}\,dt$$

etwas Verwertbares: e^{-st} geht dann nämlich für $t \to \infty$ gegen null, und an der unteren Grenze $t = 0$ verschwindet $\sin\omega t$, so daß der erste Summand rechts insgesamt verschwindet. Der Integral ganz hinten ist bis auf den Faktor $-\omega/s$ die LAPLACE-Transformierte des Cosinus, d.h.

$$\mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) = \frac{\omega}{s}\mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s)\,.$$

Auf das LAPLACE-Integral für den Cosinus wenden wir wieder die Regel der partiellen Integration an:

$$\mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s) = \int_0^\infty \cos\omega t\, e^{-st}\,dt = \cos\omega t \frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_0^\infty + \int_0^\infty \omega\sin\omega t \frac{e^{-st}}{-s}\,dt\,.$$

Hier bekommen wir an der unteren Grenze des ersten Terms rechts den Wert eins für den Cosinus, und an der oberen Grenze geht natürlich wieder der Exponentialfaktor gegen null, so daß

$$\mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s) = \frac{1}{s} + \frac{\omega}{s}\mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s)$$

ist. Insgesamt ist

$$\mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) = \frac{\omega}{s}\mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2} - \frac{\omega^2}{s^2}\mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s)$$

oder

$$\left(1 + \frac{\omega^2}{s^2}\right)\mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2}\,.$$

Multiplikation mit s^2 macht daraus

$$(s^2 + \omega^2)\mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) = \omega \quad \text{und} \quad \mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

für $\mathfrak{Re}\, s > 0$. Damit kennen wir auch

$$\mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s) = \frac{s}{\omega}\mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}\,.$$

Tatsächlich kennen wir sogar die LAPLACE-Transformation eines beliebigen trigonometrischen Polynoms, denn wegen der Linearität der Integration gilt offensichtlich

Lemma: Sowohl die FOURIER- als auch die LAPLACE-Transformation sind lineare Operationen, d.h. für zwei Funktionen f, g und zwei komplexe Zahlen λ, μ gilt

$$\widehat{\lambda f + \mu g}(\omega) = \lambda\widehat{f}(\omega) + \mu\widehat{g}(\omega)$$

und

$$\mathcal{L}\{\lambda f + \mu g\}(s) = \lambda\mathcal{L}\{f\}(s) + \mu\mathcal{L}\{g\}(s)\,,$$

sofern jeweils beide Seiten existieren. ■

Damit ist etwa

$$\mathcal{L}\{a\cos\omega t + b\sin\omega t\}(s) = \frac{as + b\omega}{s^2 + \omega^2}\,,$$

und entsprechend läßt sich auch die LAPLACE-Transformation jedes trigonometrischen Polynoms berechnen.

Wir können noch einen Schriff weiter gehen und die LAPLACE-Transformation auch auf eine gedämpfte Schwingung

$$e^{-\lambda t}(a\cos\omega t + b\sin\omega t)$$

anwenden, denn allgemein gilt:

Lemma: Falls beide Seiten existieren, ist für jedes $c \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s - c)\,.$$

Zum *Beweis* rechnen wir einfach nach:

$$\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{ct}f(t)e^{-st}\,dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(s-c)t}\,dt = \mathcal{L}\{f(t)\}(s-c)\,.$$

■

Damit ist also beispielsweise

$$\mathcal{L}\{e^{-\lambda t}(a\cos\omega t + b\sin\omega t)\}(s) = \frac{a(s+\lambda) + b\omega}{(s+\lambda)^2 + \omega^2}\,.$$

Als nächstes wollen wir „richtige“ Polynomfunktionen betrachten; wie das erste der obigen Lemmata zeigt, reicht es dazu, die Transformationen der Potenzfunktionen $t \mapsto t^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$ zu betrachten.

Beim FOURIER-Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} t^n \cos\omega t\,dt - i\int_{-\infty}^{\infty} t^n \sin\omega t\,dt$$

gibt es offensichtlich keine Chance, daß es existiert; selbst der CAUCHYsche Hauptwert existiert nicht, denn wenn der Integrand des Realteils ungerade ist, ist der des Imaginärteils gerade und umgekehrt.

Die LAPLACE-Transformation verlangt die Berechnung von

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \int_0^\infty t^n e^{-st}\,dt\,.$$

Dieses Integral können wir durch die aus **[HM1]**, *Kap. II*, §3*l* bekannte *Gammafunktion*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

ausdrücken: mit der Substitution $u = st$ wird

$$\int_0^\infty t^n e^{-st}\,dt = \int_0^\infty \frac{u^n}{s^n} e^{-u}\,\frac{du}{s} = \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^\infty u^n e^{-u}\,du = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} .$$

Wie wir damals nachgerechnet haben, ist

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0 ,$$

also

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} .$$

Für ein Polynom

$$f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$$

ist damit nach obigem Lemma

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{n!a_n}{s^{n+1}} + \frac{(n-1)!a_{n-1}}{s^n} + \cdots + \frac{2a_1}{s^2} + \frac{a_0}{s} = \frac{n!a_n + (n-1)!a_{n-1}s + \cdots + 2a_1 s^{n-1} + a_0 s^n}{s^{n+1}} .$$

Insbesondere ist die LAPLACE-Transformierte einer konstanten Funktion $f(t) = a$ gleich a/s. Genau dieselbe Transformierte hat natürlich auch die Sprungfunktion

$$f(t) = \begin{cases} a & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} ,$$

denn auf Werte an negativen Stellen kommt es bei der LAPLACE-Transformation nicht an.

Als nächstes wollen wir negative Potenzen t^{-n} betrachten. Deren LAPLACE-Transformation ist gegeben durch

$$\mathcal{L}\{t^{-n}\}(s) = \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{t^n}\,dt ,$$

und dieses sowohl an der oberen als auch an der unteren Grenze uneigentliche Integral existiert leider nicht: Für reelles $s > 0$ etwa ist für jedes $a > 0$ die Funktion e^{-as}/t^n überall im Intervall $(0, a]$ kleiner

oder gleich dem Integranden; da ihre Stammfunktion $e^{-as}/(1-n)t^{n-1}$ für $n > 1$ und $e^{-as}\ln t$ für $n = 1$ für $t \to 0$ gegen unendlich geht, existiert das Integral

$$\int_0^a \frac{e^{-as}}{t^n}\,dt$$

für kein $a > 0$, und damit existiert erst recht das obige LAPLACE-Integral nicht.

Dafür aber existiert in diesem Fall zumindest der CAUCHYsche Hauptwert des FOURIER-Integrals

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-i\omega t}}{t^n}\,dt\ !$$

Für $n = 1$ haben wir in §3f) im Zusammenhang mit dem Integralsinus nachgerechnet, daß

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\omega t}}{t}\,dt = \pi i \quad \text{für alle } \omega > 0 .$$

Ersetzen wir hier ω durch $-\omega$, wird der Integrand komplex konjugiert, also auch der CAUCHYsche Hauptwert des Integrals, und damit ist

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\omega t}}{t}\,dt = -\pi i \quad \text{für alle } \omega < 0 .$$

Für $\omega = 0$ haben wir das Integral über $1/t$, das natürlich ebenfalls nicht existiert, das aber den CAUCHYschen Hauptwert null hat, da der Integrand ungerade ist. Der CAUCHYsche Hauptwert des FOURIER-Integrals ist also

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-i\omega t}}{t}\,dt = \begin{cases} -\pi i & \text{für } \omega > 0 \\ 0 & \text{für } \omega = 0 \\ \pi i & \text{für } \omega < 0 \end{cases} .$$

Für $n > 1$ kann man genau wie in §3f) argumentieren und erhält (mit den dortigen Bezeichnungen) die Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{t^n}\,dt = \lim_{\delta\to 0} \int_{\alpha_\delta} \frac{e^{i\omega z}}{z^n}\,dz$$

für den CAUCHYschen Hauptwert. Reihenentwicklung der Exponentialfunktion führt auf

$$\int_{\alpha_\delta} \frac{e^{i\omega z}}{z^n} = \int_{\alpha_\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\omega)^k z^{k-n}}{k!}\,dz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\omega)^k}{k!} \int_{\alpha_\delta} z^{k-n}\,dz\,.$$

Für $k = n-1$ ist das rechtsstehende Integral

$$\int_{\alpha_\delta} z^{-1}\,dz = \mathrm{Ln}(\delta) - \mathrm{Ln}(-\delta) = \mathrm{Ln}(-1) = -\pi i$$

unabhängig von δ; im Falle $k \not\equiv n-1$ verschwindet

$$\int_{\alpha_\delta} z^{k-n}\,dz = \frac{\delta^{k-n+1} - (-\delta)^{k-n+1}}{k}$$

für $k \equiv n-1 \bmod 2$ und ist gleich $2\delta^k/k$ sonst. Da die geometrische Reihe $2\sum_{k=1}^{\infty} \delta^k$ eine konvergente Majorante der Summe aller solcher Terme ist und für $\delta \to 0$ gegen null geht, folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{t^n}\,dt = \lim_{\delta\to 0} \int_{\alpha_\delta} \frac{e^{i\omega z}}{z^n}\,dz = \frac{(i\omega)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot \pi i \quad \text{für } \omega > 0\,.$$

Für $\omega < 0$ wird wieder der Integrand komplex konjugiert, also auch das Ergebnis; im Faktor $(i\omega)^{n-1}$ sorgt ω selbst für die komplexe Konjugation, so daß rechts nur πi konjugiert werden muß, d.h. der CAUCHYsche Hauptwert des FOURIER-Integrals ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{t^n}\,dt = \begin{cases} -\frac{(i\omega)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\pi & \text{für } \omega > 0 \\ \frac{(i\omega)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\pi & \text{für } \omega > 0 \end{cases}\,.$$

Für $\omega = 0$ haben wir das Integral über $1/t^n$, daß für ungerades n den CAUCHYschen Hauptwert null hat und für gerades n gegen unendlich divergiert.

Um wenigstens ein Beispiel eines nicht nur als CAUCHYscher Hauptwert existierenden FOURIER-Integrals zu sehen, wollen wir als letztes Beispiel den Rechteckimpuls

$$f(t) = \begin{cases} a & \text{für } -b \le t \le b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

betrachten. Hier ist

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-b}^{b} ae^{-i\omega t}\,dt = \frac{a}{-i\omega}e^{-i\omega t}\Big|_{-b}^{b}$$
$$= \frac{a}{\omega}\,\frac{e^{i\omega b} - e^{-i\omega b}}{i} = \frac{2a\sin\omega b}{\omega}\,.$$

Mit der in der Elektrotechnik sehr wichtigen Funktion

$$\operatorname{sinc} t = \frac{\sin t}{t}$$

läßt sich dies auch schreiben als

$$\widehat{f}(\omega) = 2ab\operatorname{sinc}\omega b\,.$$

Anstelle von $\operatorname{sinc} t$ schreiben manche Autoren auch $\operatorname{si} t$, man darf die Funktion aber nicht mit Ihrer Stammfunktion, dem Integralsinus $\operatorname{Si} t$, verwechseln.

Die LAPLACE-Transformierte dieses Rechteckimpulses ist

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt = \int_0^{b} ae^{-st}\,dt = \frac{a}{s}\left(1 - e^{-sb}\right)\,,$$

und das ist gleichzeitig auch die LAPLACE-Transformierte der Rechteckimpulse

$$g(t) = \begin{cases} a & \text{für } 0 \le t \le b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad h(t) = \begin{cases} a & \text{für } t \le b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\,.$$

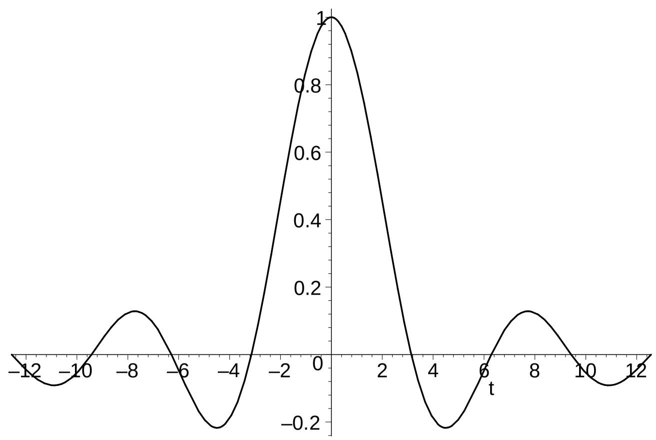

Abb. 16: Die Funktion sinc $t = \frac{\sin t}{t}$

Dagegen existiert die FOURIER-Transformierte $\widehat{h}(\omega)$ nicht einmal, und auch

$$\widehat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_0^b ae^{-i\omega t}\,dt = \frac{a}{-i\omega}e^{-i\omega t}\Big|_0^b = \frac{ia}{\omega}(e^{-i\omega b} - 1)$$

ist deutlich verschieden von $\widehat{f}(\omega)$.

§6: Ableitungen und Differentialgleichungen

Als erstes Beispiel für die Nützlichkeit von FOURIER- und LAPLACE-Transformatin wollen wir in diesem Paragraphen die Transformation der Ableitung untersuchen; dies wird unter anderem zu einer wichtigen Anwendung auf die Lösung linearer Anfangswertprobleme führen und wird uns im nächsten Paragraphen auch helfen, wichtige Eigenschaften der FOURIER-Transformation herzuleiten.

Zunächst brauchen wir einige Vorbereitungen über die Vertauschbarkeit von Differentiation und Integration:

a) Ableitungen unter dem Integralzeichen

Lemma: *a)* Die Funktion $h\colon [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ sei stetig. Dann ist auch

$$H\colon \begin{cases} [a,b] \to \mathbb{R} \\ \omega \mapsto \displaystyle\int_c^d h(\omega,t)\,dt \end{cases}$$

stetig.
b) Ist h zusätzlich r-mal stetig partiell nach der ersten Variablen ω differenzierbar, so ist

$$\frac{d^r H}{d\omega^r}(\omega) = \int_c^d \frac{\partial^r h}{\partial\omega^r}(\omega,t)\,dt\,.$$

Beweis: a) Da $[a,b]$ und $[c,d]$ abgeschlossene Intervalle sind, ist h nicht nur stetig, sondern sogar gleichmäßig stetig. Es gibt also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für jedes $t \in [c,d]$ gilt

$$|h(\omega_1,t) - h(\omega_2,t)| < \varepsilon \quad \text{falls} \quad |\omega_1 - \omega_2| < \delta\,.$$

Für solche ω_1 und ω_2 ist dann

$$|H(\omega_1) - H(\omega_2)| \le \int_c^d |h(\omega_1,t) - h(\omega_2,t)|\;dt < \varepsilon(d-c)\,.$$

Da $d-c$ eine Konstante ist, läßt sich dies durch Wahl von $\varepsilon = \eta/(d-c)$ unter jedes vorgegebene $\eta > 0$ drücken.

b) Für $\Delta \neq 0$ ist

$$\frac{H(\omega+\Delta) - H(\omega)}{\Delta} = \int_c^d \frac{h(\omega+\Delta,t) - h(\omega,t)}{\Delta}\,dt\,,$$

und der rechtsstehende Integrand ist nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gleich $\frac{\partial h}{\partial\omega}(\xi,t)$ für ein ξ zwischen ω und $\omega+\Delta$. Für

$\Delta \to 0$ geht dies gegen $\frac{\partial h}{\partial \omega}(\omega, t)$, und da die partielle Ableitung als stetig vorausgesetzt wurde, gilt wegen *a)*, daß

$$H'(\omega) = \lim_{\xi \to \omega} \int_c^d \frac{\partial h}{\partial \omega}(\xi, t)\, dt = \int_c^d \frac{\partial h}{\partial \omega}(\omega, t)\, dt$$

ist, wie behauptet. Für $r > 1$ folgt die Behauptung induktiv. ∎

Als erste Anwendung folgt ein Satz über die Vertauschung der Integrationsreihenfolge, der für die Inversion der FOURIER-Transformation fundamental sein wird:

Satz von Fubini: Für eine stetige Funktion $h\colon [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ ist

$$\int_a^b \left(\int_c^d h(\omega, t)\, dt \right) d\omega = \int_c^d \left(\int_a^b h(\omega, t)\, d\omega \right) dt\,.$$

Beweis: Das folgt entweder aus der zweidimensionalen Integrationstheorie in **[HM1]**, Kap. II, §6*b)*, da beide Seiten das Integral

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} h(\omega, t)\, d\omega\, dt$$

berechnen, wobei das Rechteck $[a, b] \times [c, d]$ als Normalbereich einmal vom Typ I und einmal vom Typ II aufgefaßt wird. Es folgt aber auch leicht aus dem gerade bewiesenen Lemma:

Für $a \le \omega \le b$ sei

$$H(\omega) = \int_c^d \left(\int_a^\omega h(\xi, t)\, d\xi \right) dt\,.$$

Nach der zweiten Aussage des gerade bewiesenen Lemmas ist dann

$$H'(\omega) = \int_c^d h(\omega, t)\, dt\,,$$

also ist die linke Seite der zu beweisenden Gleichung

$$\int_a^b \left(\int_c^d h(\omega, t)\, dt \right) d\omega = \int_a^b H'(\omega)\, d\omega = H(b) - H(a) = H(b)\,,$$

und das ist nach Konstruktion gleich der rechten Seite. ∎

Der italienische Mathematiker GUIDO FUBINI (1879–1943) arbeitete zunächst auf dem Gebiet der Differentialgeometrie, interessierte sich dann aber immer mehr für analytische Themen wie Differentialgleichungen und Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher. 1901 wurde er Professor in Catania auf Sizilien, später in Genua und ab 1908 in Turin, wo er blieb, bis er 1939 trotz seiner angegriffenen Gesundheit wegen des italienischen Faschismus nach USA emigrierte und ans Institute for Advanced Study in Princeton wechselte. Der hier zitierte Satz ist zwar sein bekanntestes, aber ganz sicher nicht sein bedeutendstes Ergebnis.

Wir interessieren uns im Augenblick nicht für Integrale über endliche Intervalle, sondern für Integrale über die gesamte reelle Gerade; bevor wir den gerade bewiesenen Satz auf FOURIER-Integrale anwenden können, müssen wir also noch den Grenzübergang $a, c \to -\infty$ und $b, d \to +\infty$ durchführen. Nach dem WEIERSTRASSschen Konvergenzkriterium gibt es hier keine Probleme, *falls* die betroffenen Integrale absolut konvergent sind. Die für uns interessante Version des Satzes von FUBINI ist also

Satz: Die stetige Funktion $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei so, daß die uneigentlichen Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |h(\omega, t)|\, dt \right) d\omega \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |h(\omega, t)|\, d\omega \right) dt$$

beide konvergieren. Dann ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\omega, t)\, dt \right) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\omega, t)\, d\omega \right) dt\,.$$

∎

b) Transformationen und Ableitungen

Die Aussagen des vorigen Abschnitts führen geradewegs auf Eigenschaften der FOURIER-Transformation; als erstes erhalten wir

Lemma: Ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mindestens r mal stetig differenzierbar und existieren die FOURIER-Transformationen von $f, t^r f$ und $f^{(r)}$, so ist

$$\frac{d^r}{d\omega^r}\widehat{f}(\omega) = (-i)^r \widehat{t^r f}(\omega)$$

und

$$\omega^r \widehat{f}(\omega) = (-i)^r \widehat{f^{(r)}}(\omega) .$$

Beweis: Nach dem Lemma im vorigen Abschnitt ist

$$\begin{aligned}\frac{d^r \widehat{f}(\omega)}{d\omega^r} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^r}{d\omega^r}\Big(f(t)e^{-i\omega t}\Big)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (-it)^r f(t)e^{-i\omega t}\,dt = (-i)^r \widehat{t^r f}(\omega) ,\end{aligned}$$

womit die erste Aussage bewiesen wäre.

Für die zweite begnügen wir uns der Einfachheit halber mit dem Fall $r = 1$, aus dem die allgemeine Aussage per Induktion folgt. Für $r = 1$ ist

$$\omega\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot \omega e^{-i\omega t}\,dt ,$$

und dieses Integral läßt sich durch partielle Integration weiter umformen. Dazu nehmen wir $f(t)$ als den ersten Faktor und $\omega e^{-i\omega t}$ als den zweiten; letzterer hat die Stammfunktion

$$\frac{\omega e^{-i\omega t}}{-i\omega} = ie^{-i\omega t} ,$$

und wir erhalten

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot \omega e^{-i\omega t}\,dt = \quad f(t)\cdot ie^{-i\omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \dot f(t)\cdot ie^{-i\omega t}\,dt .$$

Da die FOURIER-Transformierte von f existiert, $f(t)$ für $t \to \pm\infty$ gegen null; der erste Summand verschwindet also, und übrig bleibt

$$\omega\widehat{f}(\omega) = -i \int_{-\infty}^{\infty} \dot f(t)e^{-i\omega t}\,dt = -i\cdot \widehat{\dot f}(\omega) .$$

Damit ist das Lemma bewiesen. ■

Für die LAPLACE-Transformation gelten ähnliche Regeln: Falls die Funktion f mindestens r mal stetig differenzierbar ist und die LAPLACE-Transformierten ihrer Ableitungen existieren, ist nach der Regel über partielle Integration

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\dot f(t)\}(s) &= \int_0^{\infty} \dot f(t)e^{-st}\,dt = f(t)e^{-st}\Big|_0^{\infty} + s\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt \\ &= -f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\}(s)\end{aligned}$$

und damit induktiv

$$\mathcal{L}\{f^{(r)}(t)\}(s) = s^r\mathcal{L}\{f(t)\}(s) - s^{r-1}f(0) - s^{r-2}\dot f(0) - \cdots - f^{(r-1)}(0) .$$

Dies ist etwas komplizierter als bei der FOURIER-Transformation, wo wir keine Funktionswerte an der Stelle null berücksichtigen mußten, aber für die Anwendung auf Differentialgleichungen ist das meist ein *Vorteil:*

In der Praxis hat man es fast immer mit sogenannten *Anfangswertproblemen* zu tun, d.h. man kennt den Zustand eines Systems (beschreiben durch eine Funktion $f(t)$ der Zeit) zu einem gewissen Zeitpunkt t_0, den wir der Einfachheit halber als null annehmen wollen, und man kennt Naturgesetze für die weitere Entwicklung des Systems. Letztere haben meist die Form von Differentialgleichungen; ein Anfangswertproblem besteht darin, daß man anhand der Differentialgleichung und der bekannten Funktionswerte zum Zeitpunkt t_0 die weitere Entwicklung des Systems berechnen will, d.h. die Funktion f. Es geht also um die Bestimmung einer Funktion $y(t)$ mit den Eigenschaften, daß

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = b(t)$$

ist und

$$y(0) = y_0, \quad \dot y(0) = y_1, \quad \ldots, \quad y^{n-1}(0) = y_{n-1}\,.$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation macht daraus die algebraische Gleichung

$$\begin{aligned} &s^n\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - s^{n-1}y_0 - s^{n-2}y_1 - \cdots - y_{(n-1)} \\ +\,&a_{n-1}s^{n-1}\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - s^{n-2}y_0 - s^{n-3}y_1 - \cdots - y_{(n-2)} \\ &\vdots \\ +\,&a_1 s\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - y_0 \\ +\,&a_0\mathcal{L}\{y(t)\}(s) \qquad = \qquad \mathcal{L}\{b(t)\}(s) \end{aligned}$$

für $\mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, die man – so die rechte Seite existiert – leicht nach $\mathcal{L}\{y(t)\}(s)$ auflösen kann. Rücktransformation (meist anhand einer Tabelle) führt auf die Lösung $y(t)$ des Anfangswertproblems.

c) Ungedämpfte Schwingungen

Als erstes Beispiel betrachten wir die extrem einfache Gleichung für eine Masse an einer Feder, die sich reibungsfrei in x-Richtung bewegen kann:

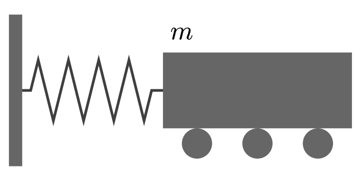

Abb. 17: Eine schwingende Masse

Nach dem HOOKEschen Gesetz wirkt auf diese Masse eine Rückstellkraft $\lambda x(t)$, die proportional ist zur Auslenkung $x(t)$ aus der Ruhelage; nach dem zweiten NEWTONschen Gesetz ist diese Kraft (eine zeitlich konstante Masse m vorausgesetzt) gleich $m\ddot x(t)$. Insgesamt ist also

$$m\ddot x(t) + \lambda x(t) = 0 \quad \text{oder} \quad \ddot x(t) + \frac{\lambda}{m}x(t) = 0\,.$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation macht daraus

$$s^2\mathcal{L}\{x(t)\}(s) - s\cdot x(0) - \dot x(0) + \frac{\lambda}{m}\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = 0$$

oder

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \frac{s\cdot x(0) + \dot x(0)}{s^2 + \frac{\lambda}{m}}\,.$$

Die schwingende Masse m soll natürlich positiv sein, und auch λ ist größer als null, da $\lambda x(t)$ die *Rückstellkraft* ist. Also ist

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \frac{x(0)\cdot s}{s^2+\omega^2} + \frac{\dot x(0)}{s^2+\omega^2} \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{\lambda}{m}}\,.$$

Hier erkennen wir die gerade berechneten LAPLACE-Transformiert en

$$\mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2} \quad \text{und} \quad \mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

und folgern, daß $x(t)$, falls LAPLACE-transformierbar, die Form

$$x(t) = x(0)\cos\omega t + \frac{\dot x(0)}{\omega}\sin\omega t$$

haben muß mit $\omega = \sqrt{\lambda/m}$. Die Masse schwingt also ungedämpft mit Frequenz $\sqrt{\lambda/m}$.

d) Gedämpfte Schwingungen

Ungedämpfte Schwingungen wir im letzten Abschnitt wird man in der Realität eher selten beobachten; in den meisten Fällen führen Reibungseffekte schließlich zum Abklingen der Schwingung. Die Reibungskraft wird im allgemeinen als proportional zur Geschwindigkeit angesetzt, d.h. die linke Seite der Differentialgleichung wird durch ein konstantes Vielfaches von $\dot x(t)$ ergänzt. Dieselbe Art von Differentialgleichung

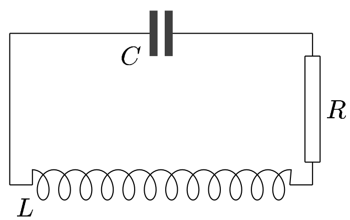

Abb. 18: Ein elektrischer Schwingkreis

erhalten wir auch, wenn wir eine Spule, einen Kondensator und einen Widerstand wie in Abbildung 18 hintereinanderschalten:

Damit hier ein Strom fließt, nehmen wir an, daß der Kondensator zur Zeitpunkt $t = 0$ eine Ladung Q_0 enthalte; die Ladung zum Zeitpunkt t sei $Q(t)$. Dann beträgt der Spannungsabfall am Kondensator

$$U_1(t) = \frac{Q(t)}{C}\,,$$

der an der Spule ist nach der LENZschen Regel gleich

$$U_2(t) = L\dot{I}(t) = L\ddot{Q}(t)\,,$$

wobei $I(t) = \dot{Q}(t)$ die Stromstärke bezeichnet, und am Widerstand haben wir natürlich nach dem OHMschen Gesetz

$$U_3(t) = RI(t) = R\dot{Q}(t)\,.$$

Diese drei Spannungen müssen sich zu Null addieren, d.h.

$$L\ddot{Q}(t) + R\dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C} = 0 \quad \text{oder} \quad \ddot{Q}(t) + \frac{R}{L}\dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{LC} = 0\,.$$

Um bei der Lösung dieser Gleichung keine komplizierten Konstanten mitschleppen zu müssen, schreiben wir die Gleichung bis auf weiteres in der Form

$$\ddot{Q}(t) + \rho\dot{Q}(t) + \sigma Q(t) = 0 \quad \text{mit} \quad \rho = \frac{R}{L} \text{ und } \sigma = \frac{1}{LC}\,.$$

Außerdem schreiben wir $y(t)$ anstelle von $Q(t)$, um es einerseits mit gewohnten Variablen zu tun zu haben und andererseits, weil wir diesen Typ von Gleichungen noch auf viele andere Probleme anwenden können,

bei denen die gesuchte Funktion nicht als Ladung interpretiert werden kann. Wir interessieren uns für das Anfangswertproblem

$$\ddot{y}(t) + \rho\dot{y}(t) + \sigma y(t) = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = y_0 \quad \text{und} \quad \dot{y}(0) = y_1\,.$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation ergibt

$$s^2\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - sy_0 - y_1 + \rho\big(s\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - y_0\big) + \sigma\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = 0$$

und damit

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{s^2 + \rho s + \sigma}\,.$$

Eine LAPLACE-Transformierte dieser Form haben wir bislang noch nicht gesehen; wir kennen nur Nenner der Form $(s+\lambda)^2 + \omega^2$. In diese Richtung führt uns einer der ältesten Tricks der Mathematik, die über 2000 Jahre alte quadratische Ergänzung:

$$s^2 + \rho s + \sigma = \left(s + \frac{\rho}{2}\right)^2 + \sigma - \frac{\rho^2}{4}\,.$$

Falls $\sigma > \rho^2/4$ können wir $\omega = \sqrt{\sigma - \frac{\rho^2}{4}}$ setzen und haben dann

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{(s+\rho/2)^2 + \omega^2} = \frac{y_0(s+\rho/2)}{(s+\rho/2)^2 + \omega^2} + \frac{y_1 + y_0\rho/2}{(s+\rho/2)^2 + \omega^2}\,.$$

Diese beiden Summanden erkennen wir als (bis auf konstante Faktoren) die LAPLACE-Transformierten von $e^{-\rho t/2}\cos\omega t$ und $e^{-\rho t/2}\sin\omega t$, d.h.

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 e^{-\rho t/2}\cos\omega t + \frac{y_1 + y_0\rho/2}{\omega}e^{-\rho t/2}\sin\omega t \\ &= e^{-\rho t/2}\left(y_0\cos\omega t + \frac{y_1 + y_0\rho/2}{\omega}\sin\omega t\right)\,. \end{aligned}$$

Der Kondensator entlädt sich also, wie es physikalisch zu erwarten war, aber der zeitliche Verlauf ist gegeben durch eine gedämpfte Schwingung. Die Dämpfung wird mit wachsendem $\rho = R/L$ immer stärker wird, d.h. je größer der Widerstand und je kleiner die Induktivität ist, desto größer ist die Dämpfung. Abbildung 19 zeigt ein Beispiel einer gedämpften Schwingung zusammen mit der Amplitudenfunktion $e^{-\rho t}$.

Falls σ kleiner ist als $\rho^2/4$, können wir $\omega = \sqrt{\frac{\rho^2}{4} - \sigma}$ setzen und haben

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{(s+\rho/2)^2 - \omega^2}\,.$$

Diesen Ausdruck kennen wir so noch nicht als LAPLACE-Transformierte einer Funktion, aber wir wissen, daß allgemein $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ ist und können hoffentlich auch noch genügend Bruchrechnung um die Beziehung

$$\frac{1}{(s+\rho/2)-\omega} - \frac{1}{(s+\rho/2)+\omega} = \frac{2\omega}{(s+\rho/2)^2-\omega^2}$$

nachzurechnen. Damit ergibt sich die LAPLACE-Transformierte zu

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y(t)\}(s) &= \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{(s+\rho/2)^2 - \omega^2} \\
&= \frac{1}{2\omega}\left(\frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{(s+\rho/2)-\omega} - \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{(s+\rho/2)+\omega}\right) \\
&= \frac{1}{2\omega}\left(\frac{y_0(s+\rho/2-\omega) + y_0\rho/2 + y_1 + y_0\omega}{s+\rho/2-\omega}\right. \\
&\qquad\left. - \frac{y_0(s+\rho/2+\omega) + y_0\rho/2 + y_1 - y_0\omega}{s+\rho/2+\omega}\right) \\
&= \frac{1}{2\omega}\left(y_0 + \frac{y_0\rho/2 + y_1 + y_0\omega}{s+\rho/2-\omega} - y_0 - \frac{y_0\rho/2 + y_1 - y_0\omega}{s+\rho/2+\omega}\right) \\
&= \frac{y_0\rho/2 + y_1 + y_0\omega}{2\omega}\cdot\frac{1}{s+\rho/2-\omega} \\
&\qquad - \frac{y_0\rho/2 + y_1 - y_0\omega}{2\omega}\cdot\frac{1}{s+\rho/2+\omega}\,.
\end{aligned}$$

Diese Summanden können wir als LAPLACE-Transformierte identifizieren: Da $1/s$ die LAPLACE-Transformierte der Konstanten Eins ist, ist $1/(s+a)$ die von e^{-as}; wir haben hier also

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y(t)\}(s) &= \frac{y_0\rho/2 + y_1 + y_0\omega}{2\omega}\cdot\mathcal{L}\{e^{-(\rho/2-\omega)t}\}(s) \\
&\qquad - \frac{y_0\rho/2 + y_1 - y_0\omega}{2\omega}\cdot\mathcal{L}\{e^{-(\rho/2+\omega)t}\}(s)
\end{aligned}$$

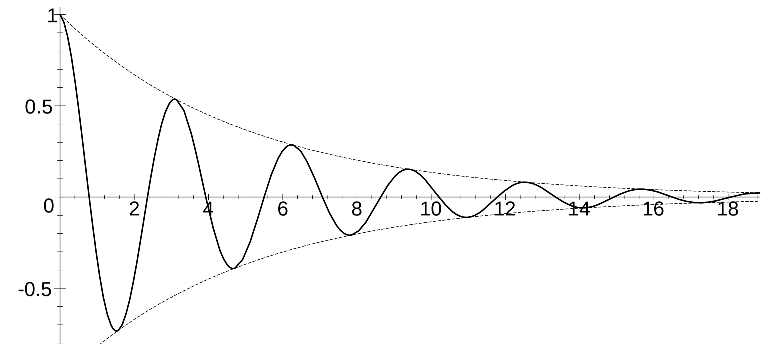

Abb. 19: Die Funktionen $e^{-\frac{t}{5}}\cos 2t$ und $\pm e^{-\frac{t}{5}}$

und somit

$$y(t) = \frac{y_0\rho/2 + y_1 + y_0\omega}{2\omega}\cdot e^{-(\rho/2-\omega)t} - \frac{y_0\rho/2 + y_1 - y_0\omega}{2\omega}\cdot e^{-(\rho/2+\omega)t}\,.$$

Wegen der Positivität von σ ist

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho^2}{4} - \sigma} < \sqrt{\frac{\rho^2}{4}} = \frac{\rho}{2}\,;$$

daher sind dies zwei Exponentialfunktionen, die für $t \to \infty$ gegen null gehen, der Kondensator entlädt sich in diesem Fall also ohne Schwingungen gemäß einer Summe zweier abfallender Exponentialfunktionen. Die Bedingung $\sigma < \frac{\rho^2}{4}$ übersetzt sich in diesem Fall in

$$\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{L^2} \quad \text{oder} \quad R > \sqrt{\frac{L}{C}}\,;$$

wenn der Widerstand zu groß ist, dämpft er also so stark, daß es keine Schwingungskomponente mehr gibt.

Bleibt noch der Fall, daß $\sigma = \rho^2/4$ ist. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y(t)\}(s) &= \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{(s+\rho/2)^2} = \frac{y_0(s+\rho/2)}{(s+\rho/2)^2} + \frac{y_1 + y_0\rho/2}{(s+\rho/2)^2} \\
&= \frac{y_0}{s+\rho/2} + \frac{y_1 + y_0\rho/2}{(s+\rho/2)^2}\,.
\end{aligned}$$

Da $1/s$ die LAPLACE-Transformierte der Eins ist und $1/s^2$ die der Identität, ist somit

$$y(t) = \left(y_0 + \left(y_1 + y_0\frac{\rho}{2}\right)t\right)\ e^{\frac{-\rho}{2}t}$$

Produkt einer linearen Funktion und einer abfallenden Eyponentialfunktion. Abbildung 20 zeigt zwei solche Funktionen, eine mit ansteigendem und eine mit abfallendem linearen Faktor.

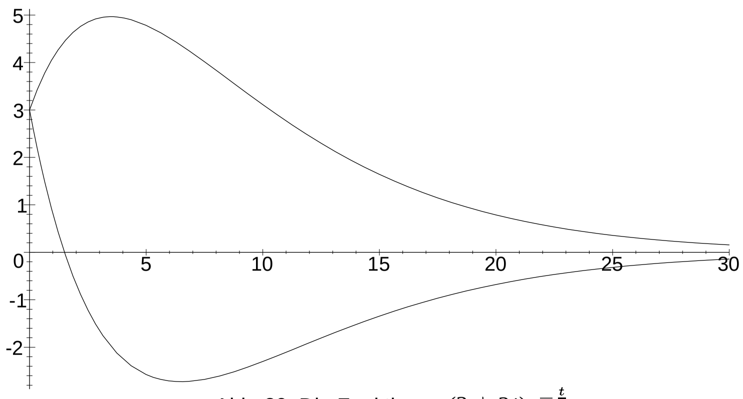

Abb. 20: Die Funktionen $(3 \pm 2t)e^{-\frac{t}{5}}$

e) Erzwungene Schwingungen

Im Stromkreis aus dem letzten Abschnitt floß nur deshalb ein Strom, weil der Kondensator aus irgendeinem Grund bereits aufgeladen war; üblicher wäre, daß ein Strom fließt, weil der Stromkreis eine Stromquelle enthält. Wir ergänzen deshalb den Stromkreis aus Abbildung 18 durch eine Wechselstromquelle mit Frequenz ω_0; der Einfachheit halber wählen wir die Phase so, daß dieser Wechselstrom durch eine reine Cosinusfunktion der Form $A_0 \cos \omega_0 t$ beschrieben werden kann mit $A_0, \omega_0 > 0$. Die Differentialgleichung wird dann zu

$$L\ddot{Q}(t) + R\dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C} = A_0 \cos \omega_0 t\,,$$

was wir wieder kurz schreiben als

$$\ddot{y}(t) + \rho\dot{y}(t) + \sigma y(t) = c \cos \omega_0 t$$

mit

$$y(t) = Q(t), \quad \rho = \frac{R}{L}, \quad \sigma = \frac{1}{LC} \quad \text{und} \quad c = \frac{A_0}{L}\,.$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation führt auf

$$(s^2 + \rho s + \sigma)\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - sy_0 - y_1 - \rho y_0 = \frac{cs}{s^2 + \omega_0^2}$$

und damit

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{s^2 + \rho s + \sigma} + \frac{cs}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + \rho s + \sigma)}\,.$$

Die Umkehrung der LAPLACE-Transformation des ersten Summanden kennen wir: Das ist die Lösung der gerade betrachteten Differentialgleichung. Mit dem zweiten Summanden könnten wir umgehen, wenn nur einer der beiden Faktoren im Nenner stünde; dann hätten wir im wesentlichen die LAPLACE-Transformierte einer Cosinusfunktion.

Genau das gleiche Problem hätten wir, wenn wir eine Stammfunktion des zweiten Summanden suchen würden, und in dieser Situation wüßten wir auch, wie wir weiter vorgehen müßten: Durch Partialbruchzerlegung könnten wir den Integranden in einfachere Brüche zerlegen, deren Stammfunktionen wir kennen. Dieser Ansatz der Partialbruchzerlegung führt auch bei der LAPLACE-Transformation oft zum Erfolg: Falls die beiden Faktoren des Nenners verschieden sind, können wir mit geeigneten Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ schreiben

$$\frac{cs}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + \rho s + \sigma)} = \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{\gamma s + \delta}{s^2 + \rho s + \sigma}\,.$$

Falls beide Nenner gleich sind, d.h. wenn

$$\rho = 0 \quad \text{und} \quad \sigma = \omega_0^2$$

ist, funktioniert dies natürlich nicht; diesen Fall werden wir vorläufig zurückstellen. Multiplikation des obigigen Ansatzes mit dem Hauptnenner führt auf die Polynomgleichung

$$\begin{aligned} cs &= (\alpha s + \beta)(s^2 + \rho s + \sigma) + (\gamma s + \delta)(s^2 + \omega_0^2) \\ &= (\alpha + \gamma)s^3 + (\beta + \alpha\rho + \delta)s^2 + (\beta\rho + \alpha\sigma + \gamma\omega_0^2)s + \beta\sigma + \delta\omega_0^2\,. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich zeigt, daß rechts alle Koeffizienten außer dem von s verschwinden müssen. Beim ersten Koeffizienten bedeutet dies, daß

$$\gamma = -\alpha$$

sein muß, und beim letzten erhalten wir

$$\delta = -\frac{\sigma}{\omega_0^2}\beta\,.$$

Damit bleiben nur noch zwei Gleichungen für α und β übrig:

$$\rho\alpha + \left(1 - \frac{\sigma}{\omega_0^2}\right)\beta = 0 \quad \text{und} \quad (\sigma - \omega_0^2)\alpha + \rho\beta = c\,.$$

Falls ρ nicht verschwindet, führt die erste Gleichung zu

$$\alpha = \frac{\frac{\sigma}{\omega_0^2} - 1}{\rho} \cdot \beta = \frac{\sigma - \omega_0^2}{\rho\omega_0^2} \cdot \beta\,,$$

und damit ist nach der zweiten Gleichung

$$\left(\frac{(\sigma - \omega_0^2)^2}{\rho\omega_0^2} + \rho\right)\beta = c$$

oder

$$\beta = \frac{c}{\frac{(\sigma-\omega_0^2)^2}{\rho\omega_0^2} + \rho} = \frac{c\rho\omega_0^2}{(\sigma - \omega_0^2)^2 + \rho^2\omega_0^2}\,.$$

Damit sind auch α, γ und δ bekannt:

$$\alpha = -\gamma = \frac{\sigma - \omega_0^2}{\rho\omega_0^2} \cdot \beta = \frac{c(\sigma - \omega_0^2)}{(\sigma - \omega_0^2)^2 + \rho^2\omega_0^2}$$

und

$$\delta = -\frac{\sigma}{\omega_0^2}\beta = \frac{-c\rho\sigma}{(\sigma - \omega_0^2)^2 + \rho^2\omega_0^2}\,.$$

Bleibt noch der Fall $\rho = 0$ zu behandeln. Dann bleibt vom Gleichungssystem für α und β nur noch

$$\left(1 - \frac{\sigma}{\omega_0^2}\right)\beta = 0 \quad \text{und} \quad (\sigma - \omega_0^2)\alpha = c$$

übrig. Ist $\sigma \neq \omega_0^2$, folgt, daß

$$\beta = \delta = 0 \quad \text{und} \quad \alpha = -\gamma = \frac{c}{\sigma - \omega_0^2}$$

sein muß, was offensichtlich genau die obigen Formeln im Spezialfall $\rho = 0$ sind. Für $\sigma = \omega_0^2$ sind wir in dem Fall, den wir zurückgestellt haben und sehen noch einmal, daß hier der obige Ansatz nicht zu Ziel führt, da die zweite Gleichung zu $0 \cdot \beta = c \neq 0$ wird. In allen anderen Fällen kennen wir nun reelle Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, so daß

$$\frac{cs}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + \rho s + \sigma)} = \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{\gamma s + \delta}{s^2 + \rho s + \sigma}$$

ist. Vom ersten Summanden wissen wir, daß

$$\mathcal{L}\left\{\alpha\cos\omega_0 t + \frac{\beta}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right\} = \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega_0^2}$$

ist; den zweiten Summanden müssen wir wie oben durch quadratische Ergänzung

$$s^2 + \rho s + \sigma = \left(s - \frac{\rho}{2}\right)^2 + \sigma - \frac{\rho^2}{4}$$

umformen, und genau wie dort hängt es vom Vorzeichen von

$$\sigma - \frac{\rho^2}{4}$$

ab, ob wir gedämpfte Schwingungen mit Frequenz

$$\omega = \sqrt{\sigma - \frac{\rho^2}{4}}$$

oder abfallende Eyponentialfunktionen erhalten. In jedem Fall ist die Lösung Linearkombination einer reinen Schwingung mit der erregenden Frequenz ω_0, im elektrischen Schwingkreis also der Frequenz der Wechselstromquelle, und einer Funktion, die für $t \to \infty$ gegen null geht. Langfristig setzt sich, wie auch Abbildung 21 zeigt, die erregende Frequenz durch.

Bleibt noch der zurückgestellte Fall, daß $\rho = 0$ und $\sigma = \omega_0^2$ ist. Dann müssen wir eine Funktion finden, deren LAPLACE-Transformierte gleich

$$\frac{cs}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$$

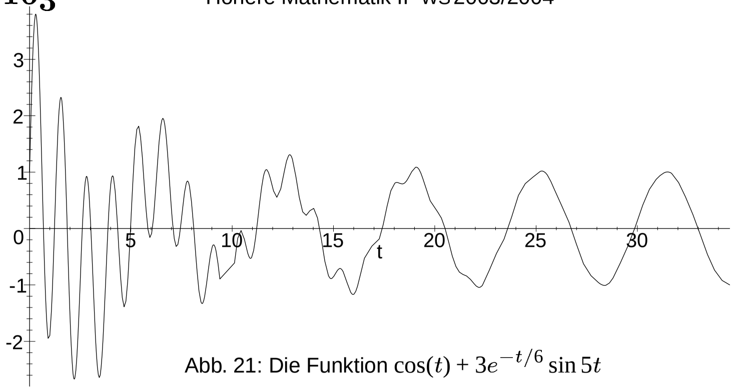

Abb. 21: Die Funktion $\cos(t) + 3e^{-t/6}\sin 5t$

ist. Diese Funktion sieht so ähnlich aus wie die Ableitung von $1/(s^2+\omega_0^2)$; in der Tat ist

$$\frac{cs}{(s^2+\omega_0^2)^2} = \frac{d}{ds}\,\frac{-c/2}{s^2+\omega_0^2}\,.$$

Die Funktion, die hier abgeleitet wird, ist die LAPLACE-Transformierte von

$$f(t) = -\frac{c}{2\omega_0}\sin\omega_0 t\,,$$

und nach Aussage *b)* des Lemmas aus §6*a* ist (sofern das Integral absolut konvergiert) allgemein

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = \int_0^\infty \frac{d}{ds}f(t)e^{-st}\,dt$$
$$= \int_0^\infty f(t)\cdot(-t)\cdot e^{-st}\,dt = \mathcal{L}\{-tf(t)\}(s)\,.$$

Also ist

$$\frac{cs}{(s^2+\omega_0^2)^2} = \mathcal{L}\left\{\frac{c}{2\omega_0}\cdot t\sin\omega_0 t\right\}(s)\,,$$

und wir haben auch diesen Fall gelöst. Die Funktion $t\sin\omega_0 t$ ist in Abbildung 22 zu sehen; ihre Amplitude steigt immer weiter an.

Da unbegrenzt ansteigende Funktionen in Anwendungen selten etwas gutes bedeuten, spricht man hier von einer *Resonanzkatastrophe:* Die

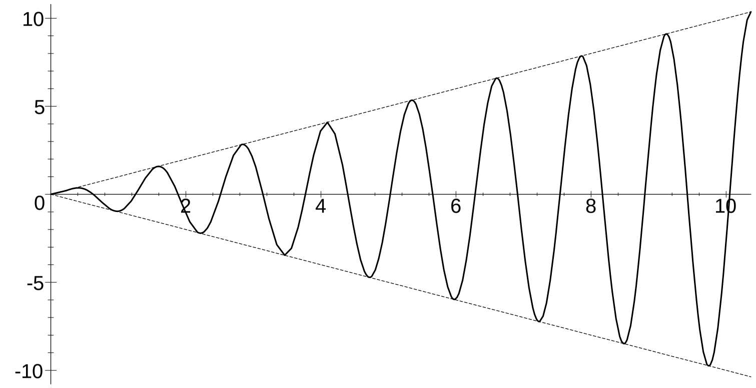

Abb. 22: Die Funktion $t\sin 5t$

erregende Schwingung hat dieselbe Frequenz wie der Schwingkreis, und das führt, bei Abwesenheit einer jeglichen Dämpfung, zu einer katastrophalen Aufschaukelung. Auch bei Dämpfung ist Resonanz zu beobachten: Die oben berechneten Koeffizienten $\alpha,\beta,\gamma,\delta$, haben allesamt den Nenner

$$(\sigma-\omega_0^2)^2+\rho^2\omega_0^2\,,$$

werden also umso größer, je näher σ bei ω_0^2 liegt, jedoch verhindert der Dämpfungsterm ρ, daß der Nenner je wirklich verschwindet. Bei kleinem ρ kann die Resonanz bei und um $\sigma=\omega_0^2$ allerdings in der Praxis trotzdem problematisch und in Extremfällen sogar katastrophal sein.

Mit den Formeln, die schon haben, könnten wir nun leicht die vollständigen Lösungen für jeden der behandelten Fälle hinschreiben, aber die bisherige Diskussion zeigt, daß das doch zu sehr langen Formeln führen würde.Die LAPLACE-Transformation ist zwar sehr gut geeignet, um die Lösung eines *konkreten* Anfangswertproblems hinzuschreiben – dann sind $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ keine komplizierten Ausdrücke, sondern einfach reelle Zahlen –, aber für abstraktere Überlegungen führt sie zu eher unübersichtlichen Ergebnissen. Wir werden daher im nächsten Kapitel alternative Methoden kennenlernen, die mehr über die Struktur der Lösungen von Differentialgleichungen aussagen.