

Das größte Potential für Vereinfachungen bieten *Symmetrien* der Funktionen. Die beiden wichtigsten Symmetrien sind die Eigenschaften, *gerade* oder *ungerade* zu sein: Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist gerade, wenn $f(-t) = f(t)$ ist für *alle* $t \in \mathbb{R}$; sie ist ungerade, wenn $f(-t) = -f(t)$ ist für *alle* $t \in \mathbb{R}$. Auch Symmetrien bezüglich anderer Punkte als $t = 0$ lassen sich gelegentlich erfolgreich ausnützen.

A priori läßt sich keine Symmetrie bezüglich $t = 0$ für die Berechnung der hier interessierenden bestimmten Integrale mit Grenzen 0 und T ausnutzen; da wir es hier aber mit periodischen Funktionen zu tun haben, sind wir nicht an diese Integrationsgrenzen gebunden:

Lemma: Ist die Funktion g periodisch mit Periode T , so ist für jedes $\tau \in \mathbb{R}$

$$\int_0^T g(t) dt = \int_\tau^{\tau+T} g(t) dt.$$

Beweis: Wir können τ schreiben als

$$\tau = kT + \tau_0 \quad \text{mit} \quad 0 \leq \tau_0 < T \quad \text{und} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Wegen der Periodizität von f ist

$$\int_\tau^{\tau+T} g(t) dt = \int_{\tau_0}^{\tau_0+T} g(t) dt;$$

es reicht also, den Fall $0 \leq \tau < T$ zu betrachten. Hierfür ist

$$\begin{aligned} \int_\tau^{\tau+T} g(t) dt &= \int_\tau^T g(t) dt + \int_T^{\tau+T} g(t) dt = \int_\tau^T g(t) dt + \int_0^\tau g(t) dt \\ &= \int_0^\tau g(t) dt + \int_\tau^T g(t) dt = \int_0^\tau g(t) dt. \end{aligned}$$

■

Speziell für $\tau = -T/2$ ist also auch

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad \text{und} \quad a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos k\omega t dt$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, und

$$b_\ell = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \ell\omega t dt \quad \text{für alle } \ell \in \mathbb{N}.$$

Ist nun f eine ungerade Funktion, so sind auch alle Funktionen $f(t) \cos k\omega t$ ungerade, d.h.

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = 0 \quad \text{und} \quad a_k = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos k\omega t dt = 0$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Die Funktion $f(t) \sin \ell\omega t$ ist Produkt zweier ungerader Funktionen und somit gerade; dies liefert die Beziehung

$$b_\ell = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin k\omega t dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin k\omega t dt,$$

die je nach der speziellen Form von f entweder nützlich ist oder auch nicht. Auf jeden Fall gibt es aber bei einer ungeraden Funktion in der FOURIER-Reihe keine Kosinusterme (einschließlich des konstanten Terms zu $\cos 0 = 1$); nur Sinusterme können von Null verschiedene Koeffizienten haben.

Für eine gerade Funktion f ist $f(t) \cdot \sin \ell\omega t$ als Produkt einer geraden und einer ungeraden Funktion ungerade, d.h.

$$b_\ell = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \ell\omega t dt = 0$$

für alle ℓ . Somit sind keine Sinusterme möglich; nur Kosinusterme (einschließlich des konstanten Terms) können auftreten. Weiter ist

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos k\omega t dt = 2 \int_0^{T/2} f(t) \cos k\omega t dt,$$

was wiederum in Abhängigkeit von der speziellen Gestalt von f entweder nützlich ist oder auch nicht.

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun endgültig zu konkreten Beispielen; das erste davon ist gerade in der Digitaltechnik von großer Bedeutung:

b) Periodische Rechteckimpulse

Hier betrachten wir die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} h & \text{für } 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ -h & \text{für } \frac{T}{2} \leq t < T \end{cases} \quad \text{mit } f(t+T) = f(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R};$$

offensichtlich ist $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Außerdem ist f eine ungerade Funktion, d.h. es gibt nur Sinusterme. Für diese ist

$$b_\ell = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \ell\omega t dt = \frac{2}{T} \left(\int_0^{T/2} h \sin \ell\omega t dt - \int_{T/2}^T h \sin \ell\omega t dt \right),$$

aber wir können uns die Auswertung des zweiten Integrals sparen, wenn wir uns daran erinnern, daß für eine ungerade Funktion b_ℓ auch berechnet werden kann als $\frac{4}{T}$ mal dem Integral von Null bis zu rhalben Periode. Somit ist

$$b_\ell = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} h \sin \ell\omega t dt = \frac{4h}{T} \left(-\frac{\cos \ell\omega \frac{T}{2} - 1}{\ell\omega} \right) = \frac{4h}{T} \left(\frac{(-1)^{\ell+1} + 1}{\ell\omega} \right),$$

denn wegen $\omega T = 2\pi$, ist $\omega T/2 = \pi$ und $\cos \ell\pi = (-1)^\ell$. Somit ist

$$b_\ell = \begin{cases} 0 & \text{für gerade } \ell \\ \frac{4h}{T} \cdot \frac{2}{\ell\omega} = \frac{4h}{\pi\ell} & \text{für ungerade } \ell \end{cases}$$

und

$$S_f(t) = \frac{4h}{\pi} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin(2\ell - 1)\omega t}{(2\ell - 1)}.$$

Wir sollten nicht zu optimistisch sein und erwarten, daß diese FOURIER-Reihe in jedem Punkt t gegen $f(t)$ konvergiert. Wir hätten einen Rechteckimpuls mit Periode T im Intervall $[0, T)$ beispielsweise auch durch

$$g(t) = \begin{cases} h & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ -h & \text{für } \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

definieren können. $f(t)$ und $g(t)$ unterscheiden sich im Intervall $[0, T)$ nur an der Stelle $t = \frac{T}{2}$, was bei der Berechnung der Integrale für die FOURIER-Koeffizienten keine Rolle spielt. Die beiden Funktionen haben daher dieselbe FOURIER-Reihe, und diese kann, selbst wenn sie konvergiert, an der Stelle $t = \frac{T}{2}$ nicht sowohl gegen $f(\frac{T}{2}) = -h$ und $g(\frac{T}{2}) = h$ konvergieren. (Tatsächlich konvergiert sie, da $\omega \frac{T}{2} = \pi$ ist und der Sinus bei allen Vielfachen von π verschwindet, gegen Null, d.h. den Mittelwert der beiden Funktionswerte.)

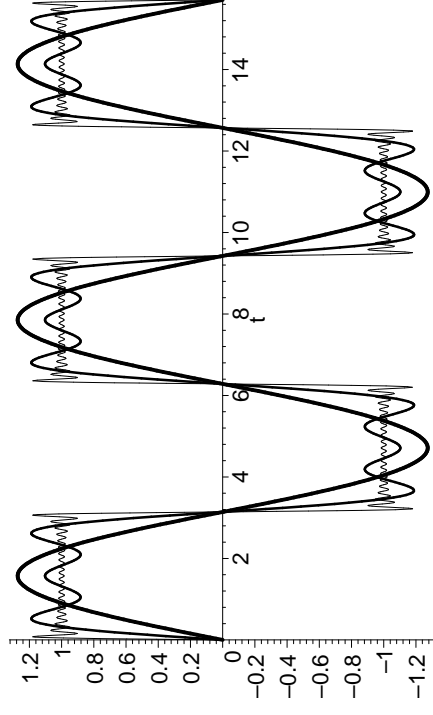


Abb. 6: FOURIER-Polynome für Rechteckimpulse

Experimentell konvergiert die berechnete Reihe abgesehen von den

Sprungstellen anscheinend recht gut: Abbildung sechs zeigt die Teilsommen mit oberen Grenzen 1, 3 und 20, die die Funktion f offensichtlich immer besser annähern. Gerade für die größeren Werte ist dieses Bild natürlich etwas gestört durch numerische Fehler und *alias*-Effekte der Rastergraphik; keine solche Störung sind allerdings die Überschwüngen an den Unstetigkeitsstellen von f : Dieses sogenannte GIBBS-Phänomen ist eine mathematisch unvermeidbare Eigenschaft von FOURIER-Reihen stückweise stetiger Funktionen, mit der wir uns in Kürze näher beschäftigen werden.

Im Augenblick sei nur kurz auf eine Anwendung dieser Überschwüngen hingewiesen: Die Pixel auf einem Computerbildschirm werden durch Rechteckimpulse geschaltet, wobei aus physikalischen Gründen Oberschwüngen hoher Frequenz bei der Übertragung so stark gedämpft werden, daß für alle praktischen Zwecke nur so etwas wie eine endliche Teilsumme der FOURIER-Reihe übertragen wird. Die in Abbildung sechs zu sehenden höherfrequenten Anteile lassen sich mit einem Funkempfänger auffangen und können dann zur Rekonstruktion des Bildschirminhalts verwendet werden; zumindest bei sensitiven Anwendungen muß ein Computer daher so abgeschirmt sein, daß von dieser Strahlungen nichts aus dem Gehäuse dringt. Bei einem Standardgehäuse hat man hier nicht die geringste Chance; Computer im Hochsicherheitsbereich brauchen daher ihre eigenen Spezialgehäuse.

c) Sägezahnimpulse

Hier betrachten wir die Funktion

$$f(t) = \frac{T}{4} - \frac{t}{2} \quad \text{für } 0 < t < T \quad \text{und} \quad f(0) = 0,$$

periodisch fortgesetzt mit Periode T auf ganz \mathbb{R} .

Dies ist eine ungerade Funktion, denn für $0 < t < T$ ist

$$f(-t) = f(-t+T) = \frac{T}{4} - \frac{(-t+T)}{2} = \frac{t}{2} - \frac{T}{4} = -f(t),$$

und $f(0) = 0$, wie es sich für eine ungerade Funktion gehört. Die FOURIER-Reihe von f enthält daher nur Sinusterme.

Zu deren Berechnung setzen wir wie üblich

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

und erhalten den Koeffizienten von $\sin \ell \omega t$ als

$$\begin{aligned} b_\ell &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \ell \omega t \, dt = \frac{2}{T} \int_0^T \left(\frac{T}{4} - \frac{t}{2} \right) \sin \ell \omega t \, dt \\ &= \frac{2}{T} \cdot \frac{T}{4} \int_0^T \sin \ell \omega t \, dt - \frac{2}{T} \cdot \frac{1}{2} \int_0^T t \sin \ell \omega t \, dt \\ &= -\frac{1}{T} \int_0^T t \sin \ell \omega t \, dt, \end{aligned}$$

da das Integral einer Sinusfunktion über eine oder mehrere volle Perioden verschwindet. Zur weiteren Rechnung wenden wir die Methode der partiellen Integration an:

$$\int u(t) \cdot \dot{v}(t) \, dt = u(t) \cdot v(t) - \int \dot{u}(t) \cdot v(t) \, dt$$

ergibt für $u(t) = t$ und $\dot{v}(t) = \sin \ell \omega t$ mit $v = -\frac{1}{\ell \omega} \cos \ell \omega t$ die Beziehung

$$\begin{aligned} \int t \sin \ell \omega t \, dt &= -t \frac{\cos \ell \omega t}{\ell \omega} + \frac{1}{\ell \omega} \int \cos \ell \omega t \, dt \\ &= -t \frac{\cos \ell \omega t}{\ell \omega} + \frac{1}{\ell^2 \omega^2} \sin \ell \omega t + C. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} b_\ell &= -\frac{1}{T} \left(\frac{-T \cdot \cos \ell \omega T + 0 \cdot \cos 0}{\ell \omega} + \frac{\sin \ell \omega T - \sin 0}{\ell^2 \omega^2} \right) \\ &= \frac{1}{\ell \omega} \cos(\ell \cdot 2\pi) = \frac{1}{\ell \omega} \end{aligned}$$

und

$$S_f(t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega}.$$

Wieder haben wir keine Ahnung, ob und gegebenenfalls wohin diese Reihe konvergiert – außer bei den ganzzahligen Vielfachen von $T/2$, denn dort verschwinden alle Sinusfunktionen in den Zählern, so daß die Summe gleich null ist.

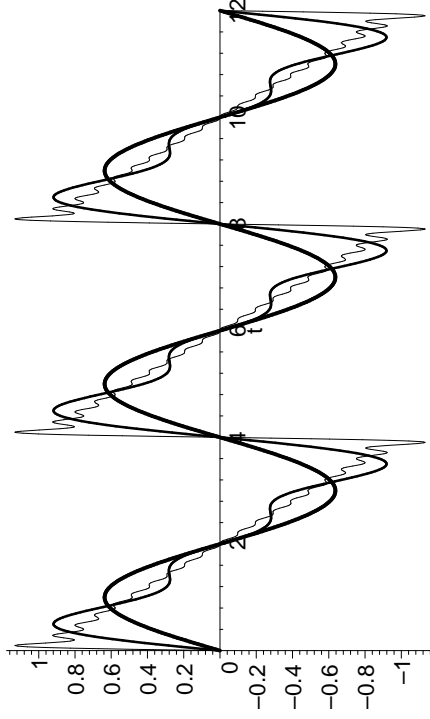


Abb. 7: FOURIERpolynome für die Sägezahnsschwingung

Abbildung 7 zeigt die Teilsummen mit 1, 3 und 20 Summanden für $T = 4$; anscheinend nähern diese die Funktion recht gut an, allerdings gibt es wieder Überschwüngen an den Sprungstellen, denn für $T = 4$ haben wir einen Sägezahn, der zwischen +1 und -1 hin- und herpendelt.

d) Der Sinus hyperbolicus

Als letztes Beispiel berechnen wir die FOURIER-Reihe von

$$f(t) = \sinh t \quad \text{für } -\pi < t \leq \pi, \text{ periodisch fortgesetzt mit Periode } 2\pi.$$

Die Koeffizienten der komplexen FOURIER-Reihe sind

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-k \cdot i\omega t} dt.$$

Man darf nun aber keineswegs den Fehler machen, daraus zu folgern, daß

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sinh t e^{-k \cdot i\omega t} dt$$

? ? ?

sei, denn $f(t)$ stimmt *nur* im Intervall $(-\pi, \pi]$ mit $\sinh t$ überein; für $\pi < t \leq 2\pi$ ist $f(t) = \sinh(t - 2\pi)$. Falls wir die mit Fragezeichen versehene Formel benutzen, berechnen wir tatsächlich die FOURIER-Reihe von

$g(t) = \sinh t$ für $0 < t \leq 2\pi$, periodisch fortgesetzt mit Periode 2π , und das ist, wie die Abbildungen acht und neun zeigen, eine völlig andere Funktion: f ist eine ungerade Funktion mit einem Wertebereich, der durch die beiden Extrema $\pm \sinh \pi \approx \pm 11,54873936$ begrenzt ist, g dagegen eine Funktion mit Werten zwischen null und $\sinh 2\pi \approx 267,7448943$, die weder gerade noch ungerade ist.

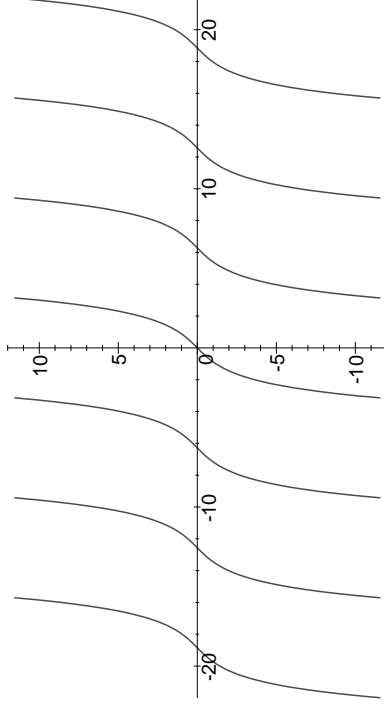


Abb. 8: Die Funktion $f(t)$

Wie groß der Unterschied zwischen den beiden Funktionen wirklich ist, sieht man am besten, wenn man sie wie in Abbildung zehn in einem

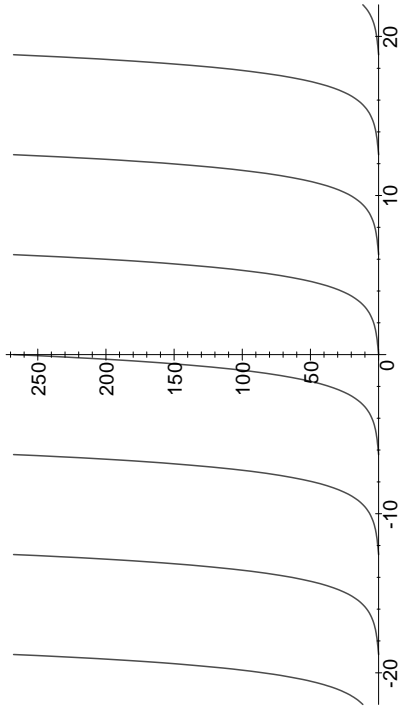


Abb. 9: Die Funktion $g(t)$

gemeinsamen Koordinatensystem abbildet: Die fett gezeichneten Kurvenstücke sind beiden Funktionen gemeinsam, und dort, wo f und g nicht übereinstimmen, ist f durch eine ausgezogene, g durch eine gestrichelte Kurve dargestellt.

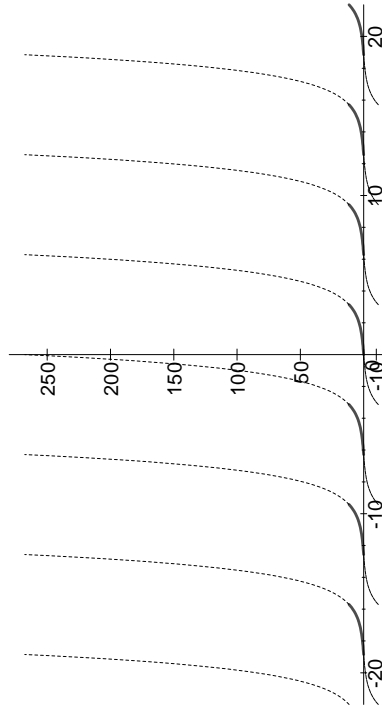


Abb. 10: $f(t)$ und $g(t)$ im gleichen Koordinatensystem

Wenn wir mit einer Integration von 0 bis 2π arbeiten wollen, müssen

wir also das Integral in zwei Teilintegrale aufteilen:

$$\int_0^{2\pi} f(t)e^{-k \cdot it} dt = \int_0^{\pi} \sinh t e^{-k \cdot it} dt + \int_{\pi}^{2\pi} \sinh(t - 2\pi) e^{-k \cdot it} dt$$

Zum Glück wissen wir aber aus §3a), daß wir bei einer periodischen Form über jedes beliebige Periodenintervall integrieren dürfen, ohne etwas am Ergebnis zu verändern: Das wurde dort zwar nur für reelle Integrale gezeigt, aber da ein komplexes Integral auf zwei reelle zurückgeführt werden kann, gilt es auch dafür. Also ist auch

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-k \cdot it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sinh t e^{-k \cdot it} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^t - e^{-t}}{2} e^{-k \cdot it} dt = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{t(1-ki)} - e^{-t(1+ki)} \right) dt \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{e^{t(1-ki)}}{1-ki} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{e^{-t(1+ki)}}{-(1+ki)} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{e^{\pi} e^{-ki\pi} - e^{-\pi} e^{ki\pi}}{1-ki} + \frac{e^{-\pi} e^{-ki\pi} - e^{\pi} e^{ki\pi}}{1+ki} \right) \\ &= \frac{(-1)^k}{4\pi} (e^{\pi} - e^{-\pi}) \left(\frac{1}{1-ki} - \frac{1}{1+ki} \right) \\ &= \frac{(-1)^k \sinh \pi (1+ki) - (1-ki) \sinh \pi}{2\pi} = \frac{(-1)^k \cdot ik}{k^2 + 1}. \end{aligned}$$

Die komplexe FOURIER-Reihe ist somit

$$S_f(t) = i \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{k^2 + 1} e^{ikt}.$$

Da der Koeffizient von e^{ikt} eine ungerade Funktion von k ist, fallen beim Einsetzen von $e^{ikt} = \cos kt + i \sin kt$ die Kosinusterme weg, während

sich die Sinusterme zu k und zu $-k$ gegenseitig verdoppeln; wir erhalten also die reelle Form

$$S_f(t) = i \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{k^2 + 1} i \sin kt = -2 \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{k^2 + 1} \sin kt,$$

die gleichzeitig die reelle FOURIER-Reihe von f ist.

Bei der direkten Berechnung über die Koeffizientenformeln für die reelle Reihe wären die Vorüberlegungen aus §3a) ebenfalls nützlich gewesen: Da f eine ungerade Funktion ist, treten nur Sinusterme auf, und deren Koeffizienten sind

$$b_\ell = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sinh t \sin \ell t dt.$$

Der Integrand hier ist in Exponentialform gleich

$$\frac{e^t - e^{-t}}{2} \cdot \frac{e^{i\ell t} - e^{-i\ell t}}{2i} = \frac{e^{t(1+i\ell)} - e^{t(1-i\ell)}}{4i} - \frac{e^{-t(1-i\ell)} - e^{-t(1+i\ell)}}{4i} + \frac{4i}{4i},$$

und die Stammfunktion des Summanden

$$\frac{e^{\pm t(1 \pm i\ell)}}{4i} \quad \text{ist} \quad \frac{e^{\pm t(1 \pm i\ell)}}{\pm 4i(1 \pm i\ell)}.$$

Die Stammfunktion des Integranden ist daher

$$\begin{aligned} & \frac{e^{t(1+i\ell)}}{4i(1+i\ell)} - \frac{e^{t(1-i\ell)}}{4i(1-i\ell)} - \frac{e^{-t(1-i\ell)}}{4i(1-i\ell)} + \frac{e^{-t(1+i\ell)}}{4i(1+i\ell)} \\ &= \frac{e^{t(1+i\ell)} - e^{-t(1+i\ell)}}{4i(1+i\ell)} - \frac{e^{t(1-i\ell)} - e^{-t(1-i\ell)}}{4i(1-i\ell)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d.h.} \quad b_\ell &= \frac{e^{t(1+i\ell)} - e^{-t(1+i\ell)}}{4\pi i(1+i\ell)} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{e^{t(1-i\ell)} - e^{-t(1-i\ell)}}{4\pi i(1-i\ell)} \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{4\pi i(1+i\ell)}{(e^{\pi(1+i\ell)} - e^{-\pi(1+i\ell)}) - (e^{-\pi(1+i\ell)} - e^{\pi(1+i\ell)})} \\ &\quad - \frac{4\pi i(1-i\ell)}{(e^{\pi(1-i\ell)} - e^{-\pi(1-i\ell)}) - (e^{-\pi(1-i\ell)} - e^{\pi(1-i\ell)})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(-1)^\ell (e^\pi - e^{-\pi} - e^{-\pi} + e^\pi)}{4\pi i(1+i\ell)} - \frac{(-1)^\ell (e^\pi - e^{-\pi} - e^{-\pi} + e^\pi)}{4\pi i(1-i\ell)} \\ &= (-1)^\ell \left(\frac{\sinh \pi}{\pi i(1+i\ell)} - \frac{\sinh \pi}{\pi i(1-i\ell)} \right) \\ &= (-1)^\ell \frac{\sinh \pi}{\pi i} \left(\frac{1}{1+i\ell} - \frac{1}{1-i\ell} \right) \\ &= (-1)^\ell \frac{\sinh \pi}{\pi i} \frac{\pi(1-i\ell) - \pi(1+i\ell)}{1+\ell^2} = (-1)^\ell \frac{\sinh \pi}{\pi} \frac{-2\ell}{\ell^2 + 1}. \end{aligned}$$

Das sind, abgesehen von der anderen Bezeichnung für den Index, genau die oben berechneten Koeffizienten.

Wir können das Integral auch ganz ohne komplexe Zahlen ausrechnen: Zweimalige Anwendung der Regel für partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} b_\ell &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sinh t \sin \ell t dt = \frac{1}{\pi} \cosh t \sin \ell t \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{\ell}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cosh t \cos \ell t dt \\ &= -\frac{\ell}{\pi} \left(\sinh t \cos \ell t \Big|_{-\pi}^{\pi} + \ell \int_{-\pi}^{\pi} \sinh t \sin \ell t dt \right) \\ &= -\frac{\ell}{\pi} \left((-1)^\ell \cdot 2 \sinh \pi + \ell \pi b_\ell \right) = -\frac{\ell}{\pi} (-1)^\ell \cdot 2 \sinh \pi - \ell^2 b_\ell. \end{aligned}$$

Somit ist

$$(1 + \ell^2) b_\ell = -\frac{2 \sinh \pi}{\pi} (-1)^\ell \ell \quad \text{und} \quad b_\ell = -\frac{2 \sinh \pi}{\pi} \frac{(-1)^\ell}{\ell^2 + 1}.$$

Damit haben wir die FOURIER-Reihe von f auf drei verschiedene Weisen berechnet; das Ergebnis war natürlich in allen drei Fällen dasselbe, der Weg dorthin aber recht verschieden. Es hängt sowohl vom Problem als auch von persönlichen Vorlieben ab, welchen Rechengang man vorzieht; gerade bei Funktionen, bei denen die FOURIER-Reihe sowohl Sinus- als auch Kosinusterme enthält, wird aber oft der Weg über die komplexe FOURIER-Reihe am schnellsten sein, da man dann nur ein Integral berechnen muß.

e) Konvergenz der berechneten Reihen

Als nächstes wollen, zunächst für Sägezahnswingungen, die Konvergenz der FOURIER-Reihe untersuchen. Für $t = 0$ und damit auch für alle Vielfachen von T sind alle Summanden null, die Reihe konvergiert also gegen null.

Für t aus dem offenen Intervall $(0, T)$ können wir folgendermaßen vorgehen: Die Summanden $\frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega}$ sind Stammfunktionen der Funktionen $\cos \ell \omega t$; also ist

$$\sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega} \quad \text{Stammfunktion von} \quad \sum_{\ell=1}^N \cos \ell \omega t.$$

Auch die Funktion f läßt sich im Intervall $(0, T)$ als Stammfunktion schreiben: Dort ist

$$f(t) = \frac{T}{4} - \frac{t}{2} = \int_{T/2}^t \left(\frac{-1}{2} \right) d\tau,$$

und da auch

$$\int_{T/2}^t \cos \ell \omega \tau d\tau = \frac{\sin \ell \omega t - \sin \ell \omega T/2}{\ell \omega} = \frac{\sin \ell \omega t - \sin \ell \pi}{\ell \omega} = \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega}$$

ist, erhalten wir die Differenz zwischen der N -ten Teilsumme und $f(t)$ als Integral:

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega} - f(t) &= \int_{T/2}^t \left(\sum_{\ell=1}^N \cos \ell \omega \tau - \left(\frac{-1}{2} \right) \right) d\tau \\ &= \int_{T/2}^t \left(\frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^N \cos \ell \omega \tau \right) d\tau. \end{aligned}$$

Diesen Integranden können wir über die komplexe Darstellung des Kosinus ausrechnen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^N \cos \ell \omega \tau &= \frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^N \frac{e^{\ell \cdot i \omega \tau} + e^{-\ell \cdot i \omega \tau}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{\ell=-N}^N e^{\ell \cdot i \omega \tau} \\ &= \frac{1}{2} e^{-N \cdot i \omega \tau} \sum_{\ell=0}^{2N} e^{\ell \cdot i \omega \tau} \end{aligned}$$

ist im wesentlichen eine geometrische Reihe, und die läßt sich bekanntlich leicht ausrechnen: Da

$$(1-q) \sum_{j=0}^r q^j = \sum_{j=0}^r q^j - \sum_{j=1}^{r+1} q^j = 1 - q^{r+1}$$

ist, folgt für $q \neq 1$ die Formel

$$\sum_{j=0}^r q^j = \frac{1 - q^{r+1}}{1 - q}.$$

In unserem Fall ist $q = e^{i \omega \tau}$ und somit

$$\sum_{\ell=0}^{2N} e^{\ell \cdot i \omega \tau} = \frac{1 - e^{(2N+1) \cdot i \omega \tau}}{1 - e^{i \omega \tau}}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^N \cos \ell \omega \tau &= \frac{1}{2} e^{-N \cdot i \omega \tau} \frac{1 - e^{(2N+1) \cdot i \omega \tau}}{1 - e^{i \omega \tau}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{e^{-N \cdot i \omega \tau} - e^{(N+1) \cdot i \omega \tau}}{1 - e^{i \omega \tau}}. \end{aligned}$$

Erweiterung des Bruchs mit $e^{\frac{1}{2} \cdot i \omega \tau}$ führt auf die symmetrischere Form

$$\frac{1}{2} \frac{e^{-(N+\frac{1}{2}) \cdot i \omega \tau} - e^{(N+\frac{1}{2}) \cdot i \omega \tau}}{e^{-\frac{1}{2} \cdot i \omega \tau} - e^{\frac{1}{2} \cdot i \omega \tau}} = \frac{\sin \left(N + \frac{1}{2} \right) \omega \tau}{2 \sin \frac{\omega \tau}{2}}.$$

Damit ist

$$\sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega} - f(t) = \int_{T/2}^t \frac{\sin \left(N + \frac{1}{2} \right) \omega \tau}{2 \sin \frac{\omega \tau}{2}} d\tau.$$

Die FOURIER-Reihe konvergiert genau dann im Punkt t gegen $f(t)$, wenn dieses Integral für $N \rightarrow \infty$ gegen null geht.

Die Suche nach einer Stammfunktion sieht ziemlich hoffnungslos aus; trotzdem hilft partielle Integration zu einem besseren Verständnis des Integrals. Wir wenden die Regel an mit

$$u(\tau) = \frac{1}{2 \sin \frac{\omega T}{2}} \quad \text{und} \quad \dot{v}(\tau) = \sin \left(N + \frac{1}{2} \right) \omega \tau,$$

d.h.

$$v(\tau) = -\frac{\cos \left(N + \frac{1}{2} \right) \omega \tau}{\left(N + \frac{1}{2} \right) \omega};$$

das Integral wird zu

$$-\frac{\cos \left(N + \frac{1}{2} \right) \omega t}{\left(2N + 1 \right) \omega \sin \frac{\omega t}{2}} + \int_{T/2}^t \frac{\cos \left(N + \frac{1}{2} \right) \omega \tau}{\left(N + \frac{1}{2} \right) \omega} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2 \sin \frac{\omega \tau}{2}} \right) d\tau,$$

denn an der unteren Grenze ist

$$\cos \left(N + \frac{1}{2} \right) \omega \frac{T}{2} = \cos \left(N + \frac{1}{2} \right) \pi = 0.$$

Auf das noch verbleibende Integral wenden wir den Mittelwertsatz der Integralrechnung in seiner allgemeineren Form an:

Für eine im Intervall $[a, b]$ stetige Funktion v und eine in $[a, b]$ integrierbare Funktion w gibt es einen Wert $\zeta \in [a, b]$, so daß gilt

$$\int_a^b v(\tau) w(\tau) d\tau = v(\zeta) \int_a^b w(\tau) d\tau.$$

Für alle, die den Satz nicht in dieser Form kennen, sei der Beweis kurz nachgetragen: Als stetige Funktion nimmt v im Intervall $[a, b]$ sowohl seinen Maximalwert v_{\max} als auch seinen Minimalwert v_{\min} an. Der Wert des linksstehenden Integrals liegt dann zwischen

$$v_{\min} \int_a^b w(\tau) d\tau \quad \text{und} \quad v_{\max} \int_a^b w(\tau) d\tau,$$

es gibt also einen Wert $v_0 \in [v_{\min}, v_{\max}]$, so daß

$$\int_a^b v(\tau) w(\tau) d\tau = v_0 \int_a^b w(\tau) d\tau$$

ist. Nach dem Zwischenwertsatz nimmt v als stetige Funktion diesen Wert v_0 irgendwo an, es gibt also ein $\zeta \in [a, b]$, so daß $v(\zeta) = v_0$ ist. Damit ist der Satz bewiesen. ■

Hier setzen wir

$$v(\tau) = \frac{\cos \left(N + \frac{1}{2} \right) \omega \tau}{\left(N + \frac{1}{2} \right) \omega} \quad \text{und} \quad w(\tau) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2 \sin \frac{\omega \tau}{2}} \right);$$

wir erhalten

$$\begin{aligned} & \int_{T/2}^t \frac{\cos \left(N + \frac{1}{2} \right) \omega \tau}{\left(N + \frac{1}{2} \right) \omega} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2 \sin \frac{\omega \tau}{2}} \right) d\tau \\ &= \frac{\cos \left(N + \frac{1}{2} \right) \omega \zeta}{\left(2N + 1 \right) \omega} \int_{T/2}^t \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\sin \frac{\omega \tau}{2}} \right) d\tau \\ &= \frac{\cos \left(N + \frac{1}{2} \right) \omega \zeta}{\left(2N + 1 \right) \omega} \left(\frac{1}{\sin \frac{\omega t}{2}} - 1 \right), \end{aligned}$$

denn $\sin \frac{\omega T}{4} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$. Also ist

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega} - f(t) \\ &= -\frac{\cos \left(N + \frac{1}{2} \right) \omega t}{\left(2N + 1 \right) \omega \sin \frac{\omega t}{2}} + \frac{\cos \left(N + \frac{1}{2} \right) \omega \zeta}{\left(2N + 1 \right) \omega} \left(\frac{1}{\sin \frac{\omega t}{2}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Für $0 < t < T$ ist $1 / \sin \frac{\omega t}{2} \geq 1$, also

$$0 \leq \frac{1}{\sin \frac{\omega t}{2}} - 1 < \frac{1}{\sin \frac{\omega t}{2}},$$

und da der Kosinus nur Werte zwischen -1 und $+1$ annimmt, folgt, daß

$$\left| \sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega} - f(t) \right| \leq \frac{2}{(2N+1)\omega \sin \frac{\omega t}{2}}$$

für alle t mit $0 < t < T$.

Für $N \rightarrow \infty$ geht die rechte Seite gegen null, also ist

$$S_f(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega} = f(t)$$

für alle t mit $0 < t < T$. Für $t = 0$ stehen links und rechts Nullen, so daß die Gleichung auch dort gilt, und da beide Seiten periodisch sind mit Periode T , gilt sie tatsächlich für alle $t \in \mathbb{R}$.

Auf abgeschlossenen Teilintervallen von $(0, T)$ ist die Konvergenz sogar gleichmäßig, denn im Intervall $[\varepsilon, T - \varepsilon]$ ist $\sin \frac{\omega t}{2} \geq \sin \frac{\omega \varepsilon}{2}$, d.h.

$$\left| \sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega} - f(t) \right| \leq \frac{2}{(2N+1)\omega \sin \frac{\omega \varepsilon}{2}}$$

für alle $t \in [\varepsilon, T - \varepsilon]$.

Mit diesem Resultat können wir nun auch die Konvergenz der FOURIER-Reihe für Rechteckimpulse genauer untersuchen:

Für $0 < t < \frac{T}{2}$ liegt auch $\frac{T}{2} - t$ im Intervall $(0, T)$, d.h. mit der gerade betrachteten Funktion f für Sägezahnimpulse ist

$$f(t) + f\left(\frac{T}{2} - t\right) = \frac{T}{4} - \frac{t}{2} + \frac{T}{4} - \frac{t}{4} + \frac{T}{2} = \frac{3T}{4}.$$

Für $\frac{T}{2} < t < T$ liegt $\frac{T}{2} - t$ im Intervall $(-T, 0)$, d.h. $\frac{3T}{2} - t$ liegt in $(0, T)$ und

$$f(t) + f\left(\frac{T}{2} - t\right) = f(t) + f\left(\frac{3T}{2} - t\right) = \frac{T}{4} - \frac{t}{2} + \frac{T}{4} - \frac{3T}{4} + \frac{t}{2} = -\frac{T}{4}.$$

Für $t = 0$ sowie auch für $t = \frac{T}{2}$ ist $f(t) + f(\frac{T}{2} - t) = 0$, insgesamt ist also

$$f(t) + f\left(\frac{T}{2} - t\right) = \begin{cases} \frac{T}{4} & \text{für } 0 < t < \frac{T}{2} \\ -\frac{T}{4} & \text{für } \frac{T}{2} < t < T \\ 0 & \text{für } t = 0, \frac{T}{2}, \end{cases}$$

periodisch fortgesetzt mit Periode T . Somit beschreibt $f(t) + f(\frac{T}{2} - t)$ einen Rechteckimpuls.

Da $S_f(t) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist

$$f(t) + f\left(\frac{T}{2} - t\right) = S_f(t) + S_f\left(\frac{T}{2} - t\right)$$

und

$$\begin{aligned} S_f\left(\frac{T}{2} - t\right) &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \ell \omega \left(\frac{T}{2} - t\right)}{\ell \omega} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\ell \omega T}{2} - \ell \omega t\right)}{\ell \omega} \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin(\ell \pi - \ell \omega t)}{\ell \omega}. \end{aligned}$$

Für gerades ℓ ist

$$\sin(\ell \pi - x) = \sin(-x) = -\sin x$$

und für ungerades ℓ ist

$$\sin(\ell \pi - x) = \sin(\pi - x) = \sin(x - \pi) = \sin x,$$

denn bei Verschiebung um π wird der $\sin x$ zu $-\sin x$. Damit folgt

$$S_f\left(\frac{T}{2} - t\right) = \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell+1} \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega}$$

und

$$S_f(t) + S_f\left(\frac{T}{2} - t\right) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega} + \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell+1} \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega}.$$

Für endliche Teilsummen heben sich bei dieser Addition einfach die Terme mit geraden Indizes weg, während die mit ungeradem Index

verdoppelt werden, d.h.

$$\sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega} + \sum_{\ell=1}^N (-1)^{\ell+1} \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega} = 2 \sum_{\ell=1}^N \frac{\sin(2\ell - 1)\omega t}{(2\ell - 1)\omega}.$$

Durch Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ folgt

$$S_f(t) + S_f\left(\frac{T}{2} - t\right) = 2 \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin(2\ell - 1)\omega t}{(2\ell - 1)\omega},$$

d.h.

$$2 \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin(2\ell - 1)\omega t}{(2\ell - 1)\omega} = \begin{cases} \frac{T}{4} & \text{für } 0 < t < \frac{T}{2} \\ \frac{T}{4} & \text{für } \frac{T}{2} < t < T \\ 0 & \text{für } t = 0, \frac{T}{2}. \end{cases}$$

Multiplikation beider Seiten mit $4h/T$ führt wegen

$$\frac{8h}{T\omega} = \frac{8h}{2\pi} = \frac{4h}{\pi}$$

zur Formel

$$\frac{4h}{\pi} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin(2\ell - 1)\omega t}{(2\ell - 1)} = \begin{cases} h & \text{für } 0 < t < \frac{T}{2} \\ -h & \text{für } \frac{T}{2} < t < T \\ 0 & \text{für } t = 0, \frac{T}{2}. \end{cases}$$

Damit ist also auch die Konvergenz der FOURIER-Reihe der Rechteckschwingung geklärt. Als kleine Anwendung können wir den Wert $t = \frac{T}{4}$ einsetzen; für diesen ist

$$\sin(2\ell - 1)\omega \frac{T}{4} = \sin(2\ell - 1)\frac{\pi}{2} = (-1)^{\ell+1},$$

d.h.

$$\frac{4h}{\pi} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1}}{(2\ell - 1)} = h$$

und somit

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1}}{(2\ell - 1)} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots = \frac{\pi}{4}.$$

f) Das Gibbs-Phänomen

Wie in den Abbildungen sechs und sieben zu sehen ist, zeigen zumindest die dort dargestellten FOURIER-Polynome Überschwüngen an den Sprungstellen. Wir wollen uns davon überzeugen, daß diese auch bei FOURIER-Polynome mit beliebig vielen Summanden nicht verschwinden.

Beginnen wir mit den Rechteckschwingungen! Wir versuchen zunächst, die Summe

$$S_N(t) = \frac{4h}{\pi} \sum_{\ell=1}^N \frac{\sin(2\ell - 1)\omega t}{(2\ell - 1)}$$

in etwas kompakterer Form darzustellen. Wegen

$$\frac{\sin(2\ell - 1)\omega t}{(2\ell - 1)\omega} = \int_0^t \cos(2\ell - 1)\omega \tau \, d\tau$$

ist

$$\frac{S_N(t)}{\omega} = \frac{4h}{\pi} \sum_{\ell=1}^N \int_0^t \cos(2\ell - 1)\omega \tau \, d\tau = \frac{4h}{\pi} \int_0^t \sum_{\ell=1}^N \cos(2\ell - 1)\omega \tau \, d\tau,$$

und diesen letzten Integranden können wir über seine komplexe Darstellung ausrechnen. Um den Nenner zwei zu eliminieren, berechnen wir den zweifachen Wert

$$\begin{aligned} 2 \sum_{\ell=1}^N \cos(2\ell - 1)\omega \tau &= \sum_{\ell=1}^N (e^{(2\ell-1)i\omega\tau} + e^{-(2\ell-1)i\omega\tau}) \\ &= \sum_{\ell=-(N-1)}^{N-1} e^{(2\ell-1)i\omega\tau} = e^{(-2N+1)i\omega\tau} \sum_{\ell=0}^{2N-1} e^{2\ell i\omega\tau}. \end{aligned}$$

Letztere Summe ist eine geometrische Reihe mit Quotient $e^{2i\omega\tau}$; nach der Summenformel hat sie den Wert

$$\frac{1 - e^{4N i\omega\tau}}{1 - e^{2i\omega\tau}}.$$

Die gesuchte Summe ist also

$$e^{-2N \cdot i\omega\tau} \frac{1 - e^{4N \cdot i\omega\tau}}{1 - e^{2i\omega\tau}} = \frac{e^{-2N \cdot i\omega\tau} (1 - e^{4N \cdot i\omega\tau})}{e^{-i\omega\tau} (1 - e^{2i\omega\tau})} = \frac{e^{-2N \cdot i\omega\tau} - e^{4N \cdot i\omega\tau}}{1 - e^{2i\omega\tau}}$$

$$= \frac{e^{-2N \cdot i\omega\tau} - e^{2N \cdot i\omega\tau}}{e^{-i\omega\tau} - e^{i\omega\tau}} = \frac{\sin 2N\omega\tau}{\sin \omega\tau}$$

und

$$S_N = \frac{2h\omega}{\pi} \int_0^t \frac{\sin 2N\omega\tau}{\sin \omega\tau} d\tau.$$

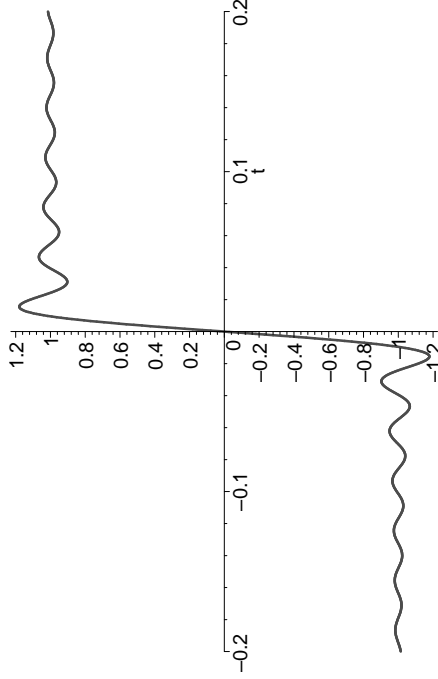


Abb. 11: Das GIBBSphänomen in Großaufnahme

Als nächstes suchen wir nach dem Betrag der Überschwängung. Abbildung 11 zeigt diese in Großaufnahme für $S_{100}(t)$; wir wollen das Maximum unmittelbar nach der Sprungstelle bestimmen und das Integral dort auswerten.

Im Maximum verschwindet die Ableitung des Integrals, also der Integrand

$$\frac{\sin 2N\omega\tau}{\sin \omega\tau}.$$

Bei der ersten positiven Nullstelle t_N ist $2N\omega t_N = \pi$ die erste positive Nullstelle des Sinus, d.h.

$$t_N = \frac{\pi}{2N\omega}.$$

Insbesondere rückt t_0 mit wachsendem N immer näher zur Null; je größer N wird, desto enger lokalisiert wird die Überschwängung.

Mit der Substitution $u = 2N\omega\tau$ wird

$$S_N(t_N) = \frac{2h\omega}{\pi} \int_0^{t_N} \frac{\sin 2N\omega\tau}{\sin \omega\tau} d\tau = \frac{2h}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin u}{2N \sin \frac{u}{2N}} du.$$

Für große Werte von N ist das Argument des Sinus im Nenner des Integranden sehr klein; wir machen also keinen großen Fehler, wenn wir den Sinus durch sein Argument annähern, und für $N \rightarrow \infty$ geht der Fehler gegen Null. Somit ist

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(t_N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2h}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin u}{2N \cdot \frac{u}{2N}} du = \frac{2h}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin u}{u} du.$$

Die Stammfunktion von $\frac{\sin u}{u}$ ist nicht in geschlossener Form durch trigonometrische Funktionen, Logarithmen, Exponentialfunktionen und ähnliches ausdrückbar, sie ist aber sehr wichtig und hat daher einen eigenen Namen:

Definition: Die Funktion

$$\text{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u} du$$

heißt *Integralsinus* oder *sinus integralis*.

Der Integralsinus existiert für beliebige reelle Argumente t , denn die Nullstelle des Integranden bei $u = 0$ ist harmlos, da

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

ist. Wie Abbildung zwölf zeigt, konvergiert er für $t \rightarrow \pm\infty$ relativ schnell gegen einen konstanten Wert, den wir nach den Vorbereitungen

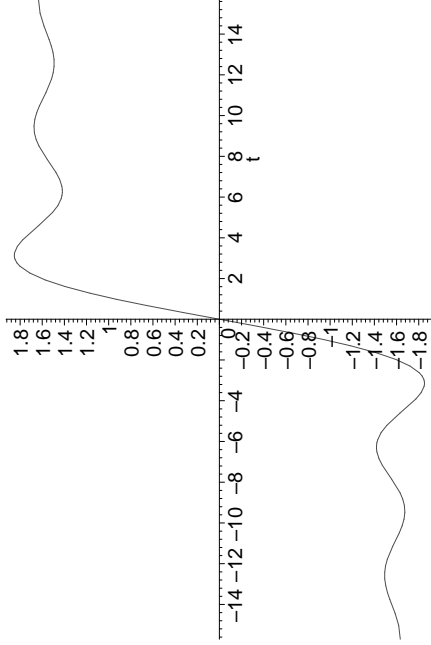


Abb. 12: Der Integralsinus

aus §1j) leicht bestimmen können: Wir wir dort mit Hilfe des Residuensatzes gesehen haben, ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \pi;$$

da der Integrand gerade ist, ist das Integral von Null bis unendlich die Hälfte davon, also $\pi/2$.

Der uns interessierende Wert des Integralsinus an der Stelle π läßt sich nicht in einfacher Weise durch bekannte Konstanten ausdrücken und muß daher numerisch berechnet werden; man erhält

$$\text{Si}(\pi) \approx 1,8519305198 \quad \text{und} \quad \frac{2h}{\pi} \text{Si}(\pi) \approx 1,1789797445 \cdot h.$$

Die FOURIER-Polynome überschwingen also auch für $N \rightarrow \infty$ den Funktionswert noch um knapp 18%.

Ersetzen wir die Funktion f durch $f + c$ für irgendeine Konstante c , ändert sich nur der konstante Term der FOURIER-Reihe; das GIBBS-Phänomen bleibt auch in seiner Größe unverändert. Verändert wird dagegen der Funktionswert; es ist daher besser, die Überschwingung

auf die unverändert gebliebene Sprunghöhe zu beziehen. Wir sollten daher besser sagen, daß die Überschwingung knapp neun Prozent der Sprunghöhe ausmacht.

Auch beim Sägezahn können wir die Überschwingung explizit berechnen: Aus Abschnitt e) wissen wir bereits, daß hier

$$\sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega} - f(t) = \int_{T/2}^t \frac{\sin(N + \frac{1}{2}) \omega \tau}{2 \sin \frac{\omega \tau}{2}} d\tau$$

ist. Auch die Ableitung dieser Funktion ist wieder der Integrand, für ihre erste positive Nullstelle t_N ist

$$\left(N + \frac{1}{2}\right) \omega t_N = \pi, \quad \text{d.h.} \quad t_N = \frac{\pi}{\left(N + \frac{1}{2}\right) \omega} = \frac{T}{2N + 1}.$$

Mit der Substitution $u = \left(N + \frac{1}{2}\right) \omega \tau$ wird

$$\int_{T/2}^{t_N} \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right) \omega \tau}{2 \sin \frac{\omega \tau}{2}} d\tau = \int_{(N + \frac{1}{2}) \pi}^{\pi} \frac{\sin u}{(2N + 1) \omega \sin \frac{u}{2N + 1}} du.$$

Wieder können wir den Sinus im Nenner für große N durch sein Argument ersetzen und erhalten somit als Limes für $N \rightarrow \infty$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{(N + \frac{1}{2}) \pi}^{\pi} \frac{\sin u}{\omega u} du = \frac{1}{\omega} \left(\text{Si}(\pi) - \lim_{t \rightarrow \infty} \text{Si}(t) \right) = \frac{\text{Si}(\pi) - \frac{\pi}{2}}{\omega}$$

$$= \frac{T}{2\pi} \text{Si}(\pi) - \frac{T}{4}.$$

Dabei ist $T/4$ der Wert, der überschwingen wird, der Maximalwert des FOURIER-Polynoms geht also für $N \rightarrow \infty$ gegen $\frac{T}{2\pi} \text{Si}(\pi)$. Dividiert man dies durch $\frac{T}{4}$, ergibt sich wieder der Quotient

$$\frac{T}{2\pi} \text{Si}(\pi) \cdot \frac{4}{T} = \frac{2}{\pi} \text{Si}(\pi),$$

auch hier gibt es also wieder eine Überschwingung um knapp 18% des Funktionswerts oder knapp neun Prozent der Sprunghöhe.

Dies ist kein Zufall: Wie wir im nächsten Paragraphen sehen werden, tritt an *jeder* Unstetigkeitsstelle einer Funktion das GIBBS-Phänomen ein, wonach die FOURIER-Polynome den Sprung um knapp neun Prozent überschwingen.



JOSIAH WILLARD GIBBS (1839–1903) promovierte 1863 an der amerikanischen Yale-Universität mit einer Arbeit über Zahnradgetriebe; die erste amerikanische Dissertation auf dem Gebiet des Ingenieurwesens. Danach unterrichtete er in Yale Latein und Naturphilosophie, bis er 1866 nach Europa fuhr, wo er 1868/1869 in Heidelberg bei KIRCHHOFF und HELMHOLTZ studierte. 1871 wurde er in Yale Professor für mathematische Physik, 1873 promovierte er seine erste Arbeit, die sich, wie viele spätere, mit Thermodynamik befaßte. Sehr einflußreich waren auch seine Arbeiten zur elektromagnetischen Theorie des Lichts und zur Vektoranalysis.

g) Die Besselsche Ungleichung

In einem EUKLIDISCHEN oder HERMITESCHEN Vektorraum V mit (HERMITESCHEM) Skalarprodukt (\cdot, \cdot) gilt für jede Orthonormalbasis \mathcal{B} , daß für zwei Vektoren

$$\vec{v} = \sum_{\vec{b} \in \mathcal{B}} \lambda_{\vec{b}} \vec{b} \quad \text{und} \quad \vec{w} = \sum_{\vec{b} \in \mathcal{B}} \mu_{\vec{b}} \vec{b}$$

das Skalarprodukt berechnet werden kann als

$$(\vec{v}, \vec{w}) = \sum_{\vec{b} \in \mathcal{B}} \lambda_{\vec{b}} \overline{\mu_{\vec{b}}},$$

wobei wegen der Basiseigenschaft von \mathcal{B} natürlich wieder alle Summen endlich sind, auch wenn die Basis \mathcal{B} unendlich sein sollte. Insbesondere ist

$$(\vec{v}, \vec{v}) = \sum_{\vec{b} \in \mathcal{B}} \lambda_{\vec{b}} \overline{\lambda_{\vec{b}}} = \sum_{\vec{b} \in \mathcal{B}} |\lambda_{\vec{b}}|^2.$$

Für trigonometrische Polynome

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{k \cdot i\omega t} \in \mathbf{P}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

ist daher

$$(f, f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2,$$

wobei auch hier wieder, da es sich um ein trigonometrisches *Polynom* handelt, in beiden unendlichen Summen nur endlich viele Summanden ungleich null sind.

$L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist zwar kein EUKLIDISCHER Vektorraum und $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ kein HERMITESCHER, aber wir hoffen doch, daß sich die trigonometrischen Funktionen *bzw.* komplexen Exponentialfunktionen wenigstens so ähnlich verhalten wie eine Orthonormalbasis; vielleicht sollte auch gelten, daß für eine Funktion $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ mit FOURIER-Reihe

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{k \cdot i\omega t} \quad \text{gilt} \quad (f, f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2,$$

obwohl *hier* wirklich unendliche Summen stehen können.

Bei der Untersuchung der Konvergenz von FOURIER-Reihen wird diese Frage eine wesentliche Rolle spielen; als ersten Einstieg dazu beweisen wir die BESSELSCHE Ungleichung:

Lemma: Für die FOURIER-Koeffizienten $c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-k \cdot i\omega t} dt$ einer Funktion $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \overline{c_k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \overline{f(t)} dt = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt;$$

insbesondere konvergiert die linke Summe also.

Beweis: Die rechte Seite der Ungleichung ist gerade das HERMITESCHE Produkt (f, f) , und auch die FOURIER-Koeffizienten lassen sich als

$$c_k = (f, e^{k \cdot i\omega t})$$

schreiben. Wir wollen noch einige weitere Produkte ausrechnen.

Zunächst definieren wir die Teilsumme

$$S_N(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=-N}^N c_k e^{k \cdot i\omega t}.$$

Dies ist ein trigonometrisches Polynom, und wir wissen daher schon aus §2a), daß

$$(S_N, S_N) = \sum_{k=-N}^N |c_k|^2$$

ist.

Als nächstes betrachten wir das Produkt

$$(f - S_N, f - S_N) = (f, f) - (S_N, f) - (f, S_N) + (S_N, S_N).$$

Auch wenn das HERMITESCHE Produkt auf $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ nicht positiv definit ist, wissen wir doch, daß die linke (und damit auch die rechte) Seite zumindest nichtnegativ ist.

Wegen der Linearität des HERMITESCHEN Produkts im ersten Argument ist weiter

$$\begin{aligned} (S_N, f) &= \left(\sum_{k=-N}^N c_k e^{k \cdot i\omega t}, f \right) = \sum_{k=-N}^N c_k \left(e^{k \cdot i\omega t}, f \right) \\ &= \sum_{k=-N}^N c_k \overline{(f, e^{k \cdot i\omega t})} = \sum_{k=-N}^N c_k \overline{c_k} = \sum_{k=-N}^N |c_k|^2 \\ &= (S_N, S_N), \end{aligned}$$

und da dies eine reelle Zahl ist, folgt auch

$$(f, S_N) = \overline{(S_N, f)} = (S_N, f) = (S_N, S_N).$$

Fassen wir alles zusammen, ist also

$$0 \leq (f - S_N, f - S_N) = (f, f) - (S_N, S_N)$$

und damit

$$(S_N, S_N) \leq (f, f) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Ausgeschrieben wird das zu

$$\sum_{k=-N}^N |c_k|^2 \leq \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

und der Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ führt zur gewünschten Ungleichung

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt,$$

wie behauptet. ■



FRIEDRICH WILHELM BESSEL (1784–1846) verließ die Schule schon im Alter von 14 Jahren und wurde Lehrling eines Handelshauses. Dessen Überseehandel veranlaßte ihn zur Beschäftigung mit Geographie, Spanisch und Englisch und schließlich (für die Navigation) mit Astronomie. Nachdem er 1804 die Bahn des HALLEYSCHEN Kometen berechnet hatte, bekam er 1806 eine Stelle als Astronom eines privaten Observatoriums. Seine Beiträge zur Mathematik entstanden aus seinen astronomischen Berechnungen. 1809 wurde er zum Direktor des Königsberger Observatoriums und zum Professor der Astronomie ernannt.

Aufgrund der Beziehungen zwischen reellen und komplexen FOURIER-Reihen (für die genau dieselben Formeln gelten, die wir in Abschnitt d) für trigonometrische Polynome hergeleitet haben) folgt, daß für die reelle FOURIER-Reihe einer reellwertigen Funktion gilt

$$|a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) \leq \frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt.$$

Insbesondere konvergieren also auch die beiden Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 \quad \text{und} \quad \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{\ell}^2.$$