und

$$\int_{\gamma_2} \frac{f(z)\,dz}{z-w} + \int_{\tau_2} \frac{f(z)\,dz}{z-w} + \int_{\delta_2} \frac{f(z)\,dz}{z-w} + \int_{\sigma_2} \frac{f(z)\,dz}{z-w} = 0$$

sind. Addieren wir die beiden Gleichungen und beachten, daß sich die Integrale über σ_1 und σ_2 sowie über τ_1 und τ_2 jeweils gegenseitig wegheben, erhalten wir die Gleichung

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(z)\,dz}{z-w} + \int_{\gamma_2} \frac{f(z)\,dz}{z-w} + \int_{\delta_1} \frac{f(z)\,dz}{z-w} + \int_{\delta_2} \frac{f(z)\,dz}{z-w} = 0\,.$$

δ_1 und δ_2 ergänzen einander zu einem im Uhrzeigersinn durchlaufenen Kreis; das Integral über diesen ist gleich minus dem Integral über den im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen Kreis, also über κ:

$$\int_{\delta_1} \frac{f(z)\,dz}{z-w} + \int_{\delta_2} \frac{f(z)\,dz}{z-w} = -\int_{\kappa} \frac{f(z)\,dz}{z-w}\,.$$

Außerdem ist

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)\,dz}{z-w} = \int_{\gamma_1} \frac{f(z)\,dz}{z-w} + \int_{\gamma_2} \frac{f(z)\,dz}{z-w}\,,$$

insgesamt also $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{f(z)\,dz}{z-w} - \int_{\kappa} \frac{f(z)\,dz}{z-w} = 0$, wie behauptet. ■

Speziell für $f(z) \equiv a$ erhalten wir die angekündigte Formel

$$\int_{\gamma} \frac{a}{z-w}\,dz = 2\pi i \cdot a\,.$$

Diese Formel gilt insbesondere auch für eine Kreislinie γ und *irgendeinen* Punkt w im Kreisinnern; w muß also, wie wir schon oben gesehen haben, nicht unbedingt Mittelpunkt sein.

Um das Lemma für eine beliebige Funktion f anwenden zu können, müssen wir nur noch das Integral längs einer geeigneten Kreislinie ausrechnen; dies führt auf die

Cauchysche Integralformel: $f\colon D \to \mathbb{C}$ sei eine holomorphe Funktion, und die geschlossene Kurve γ sei Randkurve einer offenen Teilmenge $G \subset D$, die sie im Gegenuhrzeigersinn umlaufe, und deren Abschluß $\overline{G}$ ganz in D liege. Dann ist für jeden Punkt $w \in G$

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-w}\,dz = 2\pi i \cdot f(w)\,.$$

Beweis: Nach dem gerade bewiesenen Lemma ist für jede Kreislinie $\kappa\colon \begin{cases} [-\pi,\pi] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto w + re^{it} \end{cases}$ um w mit hinreichend kleinem Radius r

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-w}\,dz = \int_{\kappa} \frac{f(z)}{z-w}\,dz\,.$$

Die rechte Seite ist nach Definition eines komplexen Integrals gleich

$$\int_{\kappa} \frac{f(z)}{z-w}\,dz = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f\big(\kappa(t)\big)}{\kappa(t)-w}\dot\kappa(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(w+re^{it})}{re^{it}} ire^{it}\,dt$$
$$= i\int_{-\pi}^{\pi} f(w+re^{it})\,dt\,.$$

Diese Formel gilt für alle hinreichend kleinen Radien r; insbesondere gilt sie also auch für $r \to 0$. Dann geht der Integrand aber gegen den konstanten Wert $f(w)$, d.h.

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-w}\,dz = \int_{\kappa} \frac{f(z)}{z-w}\,dz = i\int_{-\pi}^{\pi} f(w)\,dt = 2\pi i \cdot f(w)\,,$$

wie behauptet. ■

Man beachte, daß zur Berechnung des rechtsstehenden Integrals nur die Funktionswerte von f auf der Randkurve bekannt sein müssen und daß die Formel trotzdem den Funktionswert für jeden beliebigen inneren Punkt liefert!

f) Taylor-Entwicklung holomorpher Funktionen

Als erste Anwendung der CAUCHYschen Integralformel wollen wir uns überlegen, daß jede holomorphe Funktion in der Umgebung eines jeden Punkts ihres Definitionsbereichs durch eine Potenzreihe dargestellt werden kann. Dazu schreiben wir die CAUCHYsche Integralformel um als

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - w}\, dz\,.$$

Die geschlossene Kurve γ sei dabei der im Gegenuhrzeigersinn durchlaufene Rand irgendeines Gebiets, dessen Abschluß noch im Holomorphiegebiet von f liegt, beispielsweise ein hinreichend kleiner Kreis um w.

Bislang hatten wir w immer als konstant angenommen; da w aber beliebig im Innern des von γ berandeten Gebiets variieren kann, spricht nichts dagegen, auch w als Variable zu betrachten. Tatsächlich wird im folgenden w die eigentlich interessante Variable sein, wohingegen die Integrationsvariable z nur noch eine Hilfsfunktion hat. Um dies auch optisch zu unterstreichen, vertauschen wir die beiden Variablennamen und schreiben die CAUCHYsche Integralformel noch einmal um in

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw\,.$$

Nun entwickeln wir den Integranden in eine Potenzreihe:

Auch im Komplexen gilt die Summenformel für geometrische Reihen

$$\sum_{k=0}^{n} q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\,,$$

denn bei deren Herleitung via

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - q\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=1}^{n+1} q^k = 1 - q^{n+1}$$

kann q genausogut eine komplexe wie eine reelle Zahl sein. Für $|q| < 1$ können wir auch wie im Reellen n gegen ∞ gehen lassen und erhalten

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}\,.$$

Für beliebiges $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < |w - z_0|$ ist daher

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{(w - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{w - z_0}\,\frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{w - z_0}}$$
$$= \frac{1}{w - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(w - z_0)^{k+1}}\,.$$

Setzen wir dies in die CAUCHYsche Integralformel ein, folgt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(w) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(w - z_0)^{k+1}}\, dw$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \int_\gamma \frac{f(w)(z - z_0)^k}{(w - z_0)^{k+1}}\, dw$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \int_\gamma \frac{f(w)\, dw}{(w - z_0)^{k+1}} \cdot (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

mit

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)\, dw}{(w - z_0)^{k+1}}\,.$$

Obwohl wir f nur als holomorph, d.h. einmal (komplex) stetig differenzierbar vorausgesetzt haben, konnten wir die Funktion also in eine TAYLOR-Reihe entwickeln! Damit sollte sie insbesondere auch beliebig oft differenzierbar sein, und in der Tat können wir die TAYLOR-Reihe auch in der aus der reellen Analysis vertrauten Weise mit Ableitungen schreiben:

Satz: Die Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ sei holomorph in der offenen Menge $D \subseteq \mathbb{C}$. Dann ist f auf D beliebig oft stetig differenzierbar und sogar analytisch. Genauer gilt für jeden Punkt $z_0 \in D$ und jeden Punkt z aus einer offenen Kreisscheibe um z_0, deren Abschluß ganz in D liegt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k \quad \text{und} \quad f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)\,dw}{(w - z_0)^{k+1}} ,$$

wobei γ irgendeine Kreislinie in D um z_0 ist, für die z im Kreisinnern liegt.

Beweis: Wir haben gerade gesehen, daß unter den Voraussetzungen des Satzes gilt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \quad \text{mit} \quad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)\,dw}{(w - z_0)^{k+1}} .$$

Die rechts stehende Potenzreihe entstand durch Integration einer geometrischen Reihe; sie ist also absolut und gleichmäßig konvergent und damit beliebig oft differenzierbar im Innern des Kreises γ. Damit ist f dort beliebig oft differenzierbar, insbesondere also beliebig oft stetig differenzierbar, mit k-ter Ableitung

$$f^{(k)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\ell=k}^{\infty} \ell(\ell - 1) \cdots \big(\ell - (k - 1)\big) a_\ell (z - z_0)^{\ell - k} .$$

Für $z = z_0$ verschwinden rechts alle Summanden außer dem ersten, d.h.

$$f^{(k)}(z_0) = k!\, a_k \quad \text{und} \quad a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} .$$

Damit können wir die Reihe in gewohnter Weise schreiben, und ein Vergleich der beiden Formeln für a_k zeigt auch die behaupteten Integraldarstellungen der Ableitungen. ∎

An diesem Satz zeigt sich deutlich, wie grundverschieden reelle und komplexe Analysis sind: Im Reellen gibt es Funktionen, die n-fach differenzierbar sind, nicht aber $(n + 1)$-fach; einfachstes Beispiel ist $f_n(x) = x^{n-1}\,|x|$ für $x = 0$. Außerdem gibt es reelle Funktion wie $f(x) = e^{-1/x^2}$, in den Nullpunkt fortgesetzt durch $f(0) = 0$, die beliebig oft stetig differenzierbar sind, aber (hier für $x = 0$) nicht durch eine

TAYLOR-Reihe dargestellt werden können. (Als komplexe Funktion kann $f(z) = e^{-1/z^2}$ nicht stetig in den Nullpunkt hinein fortgesetzt werden, denn beispielsweise konvergiert $f(x)$ für eine reelle Nullfolge zwar gegen Null, für eine rein imaginäre aber gegen ∞.)

Im Komplexen folgt, wie wir gesehen haben, aus der einmaligen stetigen Differenzierbarkeit bereits, daß die Funktion beliebig oft stetig differenzierbar und überall durch eine TAYLOR-Reihe darstellbar ist. Tatsächlich reicht sogar die gewöhnliche komplexe Differenzierbarkeit, d.h. die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen; um das zu beweisen, hätten wir uns allerdings beim CAUCHYschen Integralsatz nicht mit CAUCHYs Beweis zufrieden geben dürfen, sondern hätten mehr arbeiten müssen. So haben wir nur bewiesen, daß aus den CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen *und* der Stetigkeit der beiden partiellen Ableitungen die Existenz *aller* komplexer Ableitungen und die Darstellbarkeit durch eine TAYLOR-Reihe folgt.

g) Meromorphe Funktionen

Der Integrand $f(z) = \dfrac{1}{z - w}$ der CAUCHYschen Integralformel ist natürlich nicht holomorph auf ganz $\mathbb{C}$; für $z = w$ ist er nicht einmal definiert. Allgemeiner ist die Funktion $f_n(z) = \dfrac{1}{(z - w)^n}$ für jede natürliche Zahl n bei $z = w$ nicht definiert und damit erst recht nicht holomorph.

Trotzdem handelt es sich hier um relativ harmlose Ausnahmepunkte: Wenn wir $f_n(w) = \infty$ setzen, haben wir das Verhalten der Funktion ziemlich genau beschrieben. Das Symbol „∞“ für Unendlich soll dabei *ein* Element bezeichnen, das wir zu $\mathbb{C}$ hinzunehmen. Die entstehende Menge $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist natürlich kein Körper mehr, denn beispielsweise ist

$$1 + \infty = \infty + \pi = 2\infty = i\infty = \infty \cdot e = \infty ,$$

so daß beispielsweise die Ausdrücke „$\infty - \infty$“ und „∞/∞“ nicht sinnvoll definierbar sind. Außerdem ist hier im Komplexen $\infty = -\infty$, da wir ja nur *ein* Element zu $\mathbb{C}$ hinzugefügt haben. Dies unterscheidet das „komplexe ∞“ vom „reellen ∞“, denn im Reellen unterscheidet man bekanntlich sehr wohl zwischen $+\infty$ und $-\infty$. Hier im Komplexen, wo es keine Größerbeziehung gibt, wäre diese Unterscheidung jedoch sinnlos – es sei denn, wir würden für jeden Winkel φ ein eigenes Element $e^{i\varphi}\cdot\infty$ einführen, was wohl doch etwas zuviel des Guten wäre.

Man kann sich das Element ∞ anschaulich am besten vorstellen, indem man die Zahlen*ebene* auf eine *Kugel*, die sogeannte RIEMANNsche Zahlenkugel, abbildet. Dies geschieht durch die *stereographische Projektion:*

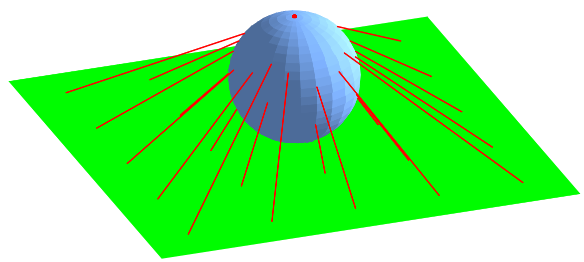


Abb. 1: Die stereographische Projektion

Dazu wird die Kugel so auf die Ebene gelegt, daß ihr Südpol gleich dem Nullpunkt ist, und jeder Punkt P der Ebene wird durch eine Gerade mit dem Nordpol verbunden. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Kugeloberfläche ist das Bild von P auf der Kugel. Unter dieser Abbildung entsprechen die Punkte der Ebene eineindeutig den Punkten auf der Kugeloberfläche – mit Ausnahme des Nordpols. Das Bild eines Ebenenpunkts auf der Kugel liegt umso näher am Nordpol, je weiter der Punkt vom Nullpunkt der Ebene entfernt ist. Daher kann man den Nordpol der Kugel mit dem Punkt ∞ identifizieren, was in der komplexen Analysis auch in der Tat die übliche Vorgehensweise ist.

Das neue Element „∞" ist sicherlich nicht ganz unproblematisch; wir dürfen es auf keinen Fall als gleichberechtigt mit den gewöhnlichen komplexen Zahlen betrachten. Insbesondere dürfen wir nicht erwarten, daß wir mit *beliebigen* Funktionen $f\colon D\to\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ sonderlich viel anfangen können; wir müssen uns beschränken auf Funktionen nach Art der beiden Eingangsbeispiele, bei denen die Stellen, an denen die Funktion unendlich wird, hinreichend isoliert sind und die Funktion außerhalb dieser Stellen holomorph ist:

Definition: Eine Funktion $f\colon D\to\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ auf einer offenen Teilmenge $D\subseteq\mathbb{C}$ heißt *meromorph*, wenn gilt:

1. Die Menge $M\subseteq D$, auf der f den Wert ∞ annimmt, hat keine Häufungspunkte.
2. Die Einschränkung
$$f_{D\smallsetminus M}\colon D\smallsetminus M\to\mathbb{C};\quad z\mapsto f(z)$$
ist holomorph.
3. Zu jedem Punkt $w\in M$ gibt es eine natürliche Zahl $m\in\mathbb{N}$, so daß $g(z)=(z-w)^n f(z)$ in einer Umgebung von w holomorph ist.

Die Punkte $w\in M$ heißen *Polstellen* von f; die kleinste Zahl $n\in\mathbb{N}$, für die 3. gilt, heißt *Ordnung* der Polstelle w.

Es ist klar, daß die beiden Eingangsbeispiele meromorph sind im Sinne dieser Definition: $f(z)=1/z$ hat genau einen Pol im Nullpunkt, d.h. $M=\{0\}$; die Ordnung dieses Pols ist eins, denn $z\cdot f(z)\equiv 1$ ist (sogar auf ganz $\mathbb{C}$) holomorph. Entsprechend hat $g(z)=1/(z-2)^2$ einen Pol zweiter Ordnung bei $w=2$ und ist in allen anderen Punkten von $\mathbb{C}$ holomorph.

Ein Beispiel einer meromorphen Funktion mit unendlich vielen Polstellen ist
$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{i(e^{iz}+e^{-iz})}\,.$$
Diese Funktion ist holomorph in allen Punkten, in denen der Kosinus nicht verschwindet, d.h. auf $\mathbb{C}\smallsetminus M$ mit
$$M=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\;\middle|\;k\in\mathbb{Z}\right\}.$$
Vom Reellen her wissen wir, daß
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$
ist; dies gilt auch im Komplexen, denn
$$\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\cdot\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots\,.$$
Wir müssen allerdings keine Nullstelle des Sinus, sondern die Nullstellen des Kosinus kompensieren; dazu erinnern wir uns daran, daß der

Name *Kosinus* daher kommt, daß es sich um den Sinus des Komplementärwinkels handelt, d.h. $\cos z = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$. Daher ist

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos z}{z - \frac{\pi}{2}} = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right)}{z - \frac{\pi}{2}} = -\lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(z - \frac{\pi}{2}\right)}{z - \frac{\pi}{2}} = -1\,.$$

Genauso rechnet man nach, daß $\lim\limits_{z\to-\frac{\pi}{2}} \frac{\cos z}{z - \frac{\pi}{2}} = 1$ ist. Da beide Grenzwerte nicht verschwinden, folgt daraus für die Kehrwerte

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{z - \frac{\pi}{2}}{\cos z} = -1 \quad \text{und} \quad \lim_{z\to-\frac{\pi}{2}} \frac{z + \frac{\pi}{2}}{\cos z} = 1\,,$$

also schließlich

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \left(z - \frac{\pi}{2}\right) \tan z = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{(z - \frac{\pi}{2}) \sin z}{\cos z} = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$$

und

$$\lim_{z\to-\frac{\pi}{2}} \left(z + \frac{\pi}{2}\right) \tan z = \lim_{z\to-\frac{\pi}{2}} \frac{(z + \frac{\pi}{2}) \sin z}{\cos z} = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1\,;$$

entsprechend auch an den um 2π verschobenen Stellen. Somit hat der Tangens in allen Punkten aus M Pole erster Ordnung, ist also auf ganz $\mathbb{C}$ meromorph.

(Hier bewährt sich wieder, daß wir nur *einen* Punkt ∞ betrachten: Es wäre nicht möglich, den Tangens in sinnvoller Weise als Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ zu definieren, denn an jeder Polstelle ist der Grenzwert von der einen Seite gleich $-\infty$ und von der andern gleich ∞.)

h) Laurent-Reihen

Wir wollen uns als nächstes davon überzeugen, daß auch jede meromorphe Funktion um *jeden* Punkt ihres Definitionsbereichs in so etwas ähnliches wie eine TAYLOR-Reihe entwickelt werden kann, die sogenannte LAURENT-Reihe.

Betrachten wir nun eine meromorphe Funktion $f\colon D \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und einen Punkt $z_0 \in D$. Falls f in z_0 holomorph ist, ist es auch in einer Umgebung von z_0 holomorph, also dort in eine TAYLOR-Reihe entwickelbar.

Andernfalls muß z_0 ein Pol sein; dessen Ordnung sei n. Dann ist die Funktion $g(z) \underset{\text{def}}{=} (z - z_0)^n f(z)$ in einer Umgebung von z_0 holomorph, hat dort also eine TAYLOR-Entwicklung

$$g(z) = (z - z_0)^n f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k\,.$$

Division durch $(z - z_0)^n$ ergibt die LAURENT-Reihe

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit} \quad a_k = c_{k-n}\,.$$

Dabei ist $a_{-n} \neq 0$, denn sonst wäre auch $(z - z_0)^{n-1} f(z)$ holomorph in einer Umgebung von z_0, die Polstelle hätte also höchsten die Ordnung $n - 1$.

Damit folgt:

Satz: Die Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ sei meromorph in der offenen Menge $D \subseteq \mathbb{C}$. Dann gibt es für jeden Punkt $z_0 \in D$ eine ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$, so daß für jeden Punkt $z \neq z_0$ aus einer offenen Kreisscheibe um z_0, deren Abschluß ganz in D liegt und außer eventuell z_0 keine Pole von f enthält, gilt:

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit} \quad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)\,dw}{(w - z_0)^{k+1}}\,,$$

wobei γ irgendeine Kreislinie um z_0 ist, für die z im Kreisinnern liegt und dieses Innere keine Polstellen außer höchstens z_0 enthält. ■

PIERRE ALPHONSE LAURENT (1813–1854) war Kommandant eines Ingenieurkorps der französischen Armee und leitete unter anderem den Ausbau des Hafens von Le Havre. Seine Arbeit über die LAURENT-Reihen reichte er etwas zu spät für den großen Preis der Akademie von 1842 ein, so daß sie trotz CAUCHYs Fürsprache nicht berücksichtigt wurde. Ansonsten schrieb er anscheinend nur noch zwei weitere Arbeiten, die erst von seiner Witwe bei der Akademie eingereicht wurden. Die eine erschien 1863, die andere nie.

Eine LAURENT-Reihe unterscheidet sich somit nur dadurch von einer TAYLOR-Reihe, daß sie auch endlich viele Summanden mit negativen

Exponenten haben kann. Diese treten genau dann auf, wenn die Funktion f im Punkt z_0 einen Pol hat. Wählt man n minimal, ist also $a_{-n} \neq 0$ ist, so handelt es sich dabei offenbar genau um einen Pol n-ter Ordnung: Multipliziert man nämlich die LAURENT-Reihe mit $(z-z_0)^n$, so verschwinden alle negativen Potenzen; sie wird also zur TAYLOR-Reihe einer holomorphen Funktion. Multipliziert man dagegen mit einer kleineren Potenz von $(z-z_0)$, so steht nach a_{-n} weiterhin eine negative Potenz, das Produkt wird also für $z = z_0$ weiterhin unendlich.

Die Summe

$$H(z) = \sum_{k=-n}^{-1} a_k (z-z_0)^k = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{a_{-\ell}}{(z-z_0)^\ell}$$

der Terme mit negativen Potenzen wird als *Hauptteil* der meromorphen Funktion $f(z)$ im Punkt z_0 bezeichnet; offensichtlich ist die Differenz $f(z) - H(z)$ in einer Umgebung von z_0 holomorph, da sie dort durch eine TAYLOR-Reihe dargestellt werden kann.

Über die Hauptteile einer meromorphen Funktion läßt sich die altbekannte Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen neu verstehen: Ist $f(z) = P(z)/Q(z)$ eine rationale Funktion, Quotient zweier Polynome also, und hat der Nenner die komplexen Nullstellen $z_1, \dots, z_r$ mit Vielfachheiten $e_1, \dots, e_r$, so hat die LAURENT-Reihe im Punkt z_ν einen Hauptteil der Form

$$H_\nu(z) = \sum_{k=1}^{e_\nu} \frac{a_{-k,\nu}}{(z-z_\nu)^k} .$$

Da die Differenz $f(z) - H_\nu(z)$ im Punkt z_ν holomorph ist, haben wir nach Subtraktion *aller* Hauptteile eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe rationale Funktion

$$h(z) = f(z) - \sum_{\nu=1}^{r} H_\nu(z) ;$$

das Nennerpolynom von h hat also, bei gekürzter Darstellung, keine Nullstelle. Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, ist ein Polynom ohne komplexe Nullstelle notwendigerweise konstant, die Funktion $h(z)$

ist also ein Polynom, und wir haben die Partialbruchzerlegung

$$f(z) = h(z) + H_1(z) + \cdots + H_r(z) .$$

Berechnet wird sie im allgemeinen natürlich nicht über die Integraldarstellung der Koeffizienten in den Hauptteilen, sondern über einem Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten. Ein solcher Ansatz ist aber nur gerechtfertigt, wenn die *Existenz* einer solchen Zerlegung klar ist; diese Existenz läßt sich beispielsweise mit dem EUKLIDischen Algorithmus beweisen oder aber, wie hier, mit LAURENT-Reihen.

LAURENT-Reihen sind beispielsweise nützlich in der diskreten Signalverarbeitung, wo man es mit Folgen $(a_k)_{k \geq n}$ reeller oder komplexer Zahlen zu tun hat, nämlich den Werten eines Signals zu den Zeitpunkten $t = k$. Einer solchen Folge ordnet man ihre z-Transformierte

$$X(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k$$

zu, aus der wiederum sich die Folge der a_k nach obigen Formeln rekonstruieren läßt durch

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{X(w)\,dw}{w^{k+1}} .$$

Die z-Transformation wird vor allem angewandt, um linear rekursiv definierte Folgen zu bestimmen oder (was äquivalent ist) sogenannte lineare Differenzengleichungen zu lösen. Ihre Nützlichkeit kommt daher, daß bei einer Schaltung der Zustand zu einem gegebenen Zeitpunkt meist relativ einfach als Funktion der Zustände in den vorausgegangenen Takten ausgedrückt werden kann.

Wir betrachten hier nur ein ganz einfaches Beispiel, in dem weder komplexe Zahlen noch Koeffizienten mit negativem Index auftauchen:

Die Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ sei definiert durch

$$a_0 = 1 \quad \text{und} \quad a_{k+1} = 3a_k + 1 \ \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0 .$$

Dann ist überall dort, wo beide Seiten konvergieren, auch

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} (3a_k + 1) z^k .$$

Mit $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ ist die rechte Seite gleich

$$\sum_{k=0}^{\infty}(3a_k + 1)z^k = 3X(z) + \sum_{k=0}^{\infty} = 3X(z) + \frac{1}{1-z}\,;$$

die linke ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}z^k = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}z^{k+1} = \frac{1}{z}\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k = \frac{X(z)-1}{z}\,,$$

denn $a_0 = 1$. Somit ist

$$\frac{X(z)-1}{z} = 3X(z) + \frac{1}{1-z}$$

und

$$\left(\frac{1}{z} - 3\right)X(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{z} = \frac{1}{z(1-z)}\,,$$

also

$$X(z) = \frac{\frac{1}{z(1-z)}}{\frac{1}{z} - 3} = \frac{\frac{1}{1-z}}{1-3z} = \frac{1}{(1-z)(1-3z)}\,.$$

Von letzterer Funktion brauchen wir die LAURENT-Entwicklung; die bekommen wir am einfachsten durch Partialbruchzerlegung: Nach der allgemeinen Theorie läßt sich der Bruch schreiben als

$$\frac{1}{(1-z)(1-3z)} = \frac{a}{1-z} + \frac{b}{1-3z} = \frac{a(1-3z)+b(1-z)}{(1-z)(1-3z)}$$
$$= \frac{(a+b)-(3a+b)z}{(1-z)(1-3z)}\,;$$

a und b können also leicht berechnet werden als die Lösungen $a = -1/2$ und $b = 3/2$ des linearen Gleichungssystems $a + b = 1$ und $3a + b = 0$.

Somit ist

$$X(z) = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-z} + \frac{3}{2}\frac{1}{1-3z} = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} z^k + \frac{3}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(3z)^k$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^{k+1}-1}{2}\,z^k\,,$$

und diese Reihe konvergiert für alle z mit $|z| < 1/3$. Also ist

$$a_k = \frac{3^{k+1}-1}{2}\,.$$

Für Interessenten sei noch ein geringfügig interessanteres zweites Beispiel betrachtet, die sogenannten FIBONACCI-Zahlen F_i. Sie sind durch folgende Rekursionsformel definiert:

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad F_i = F_{i-1} + F_{i-2} \quad \text{für } i \geq 2\,.$$

FIBONACCI führte sie ein, um die Vermehrung einer Karnickelpopulation durch ein einfaches Modell zu berechnen.. In seinem 1202 erschienenen Buch *Liber abaci* schreibt er:

Ein Mann bringt ein Paar Karnickel auf einen Platz, der von allen Seiten durch eine Mauer umgeben ist. Wie viele Paare können von diesem Paar innerhalb eines Jahres produziert werden, wenn man annimmt, daß jedes Paar jeden Monat ein neues Paar liefert, das vom zweiten Monat nach seiner Geburt an produktiv ist?

LEONARDO PISANO (1170–1250) ist heute vor allem unter seinem Spitznamen FIBONACCI bekannt; gelegentlich nannte er sich auch BIGOLLO, auf Deutsch *Tunichtgut* oder *Reisender*. Seine Bücher waren mit die ersten, die die indisch-arabischen Ziffern in Europa einführten. Er behandelt darin nicht nur Rechenaufgaben für Kaufleute, sondern auch zahlentheoretische Fragen, beispielsweise daß man die Quadratzahlen durch Aufaddieren der ungeraden Zahlen erhält. Auch betrachtet er Beispiele nichtlinearer Gleichungen, die er approximativ löst, und erinnert an viele in Vergessenheit geratene Ergebnisse der antiken Mathematik.

Um die Zahlen F_i durch eine geschlossene Formel darzustellen, betrachten wir ihre z-Transformierte

$$X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i z^i\,.$$

Auf Grund der Rekursionsformel $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ für $i \geq 2$ ist

$$\sum_{i=2}^{\infty} F_i z^i = \sum_{i=2}^{\infty} F_{i-1}z^i + \sum_{i=2}^{\infty} F_{i-1}z^i = z\sum_{i=1}^{\infty} F_i z^i + z^2\sum_{i=0}^{\infty} F_{i-1}z^i\,,$$

was wir wegen $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$ auch in der Form

$$X(z) - z = zP(z) + z^2 X(z)$$

schreiben können. Auflösen nach $X(z)$ führt auch

$$X(z) = \frac{z}{1 - z - z^2} .$$

Um die rechte Seite als Potenzreihe in z zu schreiben, versuchen wir, sie durch Terme der Form $\frac{1}{1-q}$ darzustellen, die wir als Summen geometrischer Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} q^i$ schreiben können.

Da $z^2 + z - 1 = \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$ ist, verschwindet der Nenner für die beiden Werte

$$z = z_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = -\frac{1 \mp \sqrt{5}}{2} .$$

Nach dem Satz von VIÈTE ist $z_1 z_2 = z_1 + z_2 = -1$, also

$$1 - z - z^2 = -(z - z_1)(z - z_2) = \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{z_1 z_2}$$

$$= \left(1 - \frac{z}{z_1}\right)\left(1 - \frac{z}{z_2}\right) = (1 + z_2 z)(1 + z_1 z) .$$

Da wir die Summenformel der geometrischen Reihe besser anwenden können, wenn wir Terme der Form $(1 - q)$ haben, definieren wir die beiden neuen Zahlen

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad \overline{\phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} ;$$

dann ist

$$1 - z - z^2 = (1 - \phi z)(1 - \overline{\phi} z) .$$

Bemerkung: ϕ und $\overline{\phi}$ erfüllen die Gleichung $\phi^2 - \phi - 1 = 0$ oder $\phi^2 = \phi + 1$, d.h. ϕ ist das Verhältnis des *goldenen Schnitts:* Zwei Größen $a > b$ stehen bekannlich in diesem Verhältnis, wenn sich $a + b$ zu a verhält wie a zu b. Für $\phi = a/b$ ist dies die Bedingung

$$1 + \phi^{-1} = 1 + \frac{b}{a} = \frac{a + b}{a} = \frac{a}{b} = \phi ,$$

die nach Multiplikation mit ϕ zu $\phi + 1 = \phi^2$ wird.

Nach diesen Vorbereitungen können wir mit der Partialbruchzerlegung von $X(z)$ beginnen: Nach der allgemeinen Theorie machen wir den Ansatz

$$X(z) = \frac{z}{1 - z - z^2} = \frac{\alpha}{1 - \phi z} + \frac{\beta}{1 - \overline{\phi} z} = \frac{(\alpha + \beta) - (\alpha\overline{\phi} + \beta\phi)z}{1 - z - z^2} ,$$

der auf die beiden Gleichungen

$$\alpha + \beta = 0 \quad \text{und} \quad \alpha\overline{\phi} + \beta\phi = -1$$

führt. Einsetzen von $\beta = -\alpha$ in die zweite Gleichung zeigt, daß

$$\alpha(\overline{\phi} - \phi) = -\alpha\sqrt{5} = -1 \quad \text{oder} \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

ist. Also ist

$$X(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 - \phi z} - \frac{1}{1 - \overline{\phi} z} \right) .$$

Diese beiden Summanden können wir nun als Summen geometrischer Reihen interpretieren und erhalten

$$X(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \phi^i z^i + \sum_{i=0}^{\infty} \overline{\phi}^i z^i \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{i=1}^{\infty} (\phi^i + \overline{\phi}^i) .$$

Koeffizientenvergleich zeigt, daß

$$F_i = \frac{\phi^i + \overline{\phi}^i}{\sqrt{5}}$$

ist, womit wir die gesuchte explizite Formel gefunden hätten.

In Zahlen ist $\phi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618034$, $\overline{\phi} = 1 - \phi \approx -0{,}618034$ und $\sqrt{5} \approx 2{,}236068$; der Quotient $\overline{\phi}^i/\sqrt{5}$ ist also für jedes i kleiner als $1/2$. Daher können wir F_i auch einfacher berechnen als nächste ganze Zahl zu $\phi^i/\sqrt{5}$. Insbesondere folgt, daß F_i exponentiell mit i wächst.

Für weitere und interessantere Beispiele sei auf die *Elektrotechnik II* verwiesen.

i) Der Fundamentalsatz der Algebra

Wie im vorigen Abschnitt angekündigt, wollen wir uns hier überlegen, daß jedes nichtkonstante komplexe Polynom mindestens eine Nullstelle hat; tatsächlich kann es sogar als Produkt von Linearfaktoren geschrieben werden. Dazu beweisen wir zunächst den

Satz von Liouville: Die Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph und beschränkt. Dann ist f konstant.

Beweis: Konkret sei $|f(z)| \le M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Für eine Kreislinie γ vom Radius R um einen Punkt $z \in \mathbb{C}$ ist dann nach dem Satz über die TAYLOR-Entwicklung holomorpher Funktionen aus dem letzten Abschnitt

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)\,dw}{(z-w)^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z+Re^{it})}{(Re^{it})^2} iRe^{it}\,dt\,,$$

also

$$\left|f'(z)\right| \le \frac{1}{2\pi} \left|\int_\gamma \frac{f(w)\,dw}{(z-w)^2}\right| \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\left|f(z+Re^{it})\right|}{R^2}\,dt \le \frac{M}{R}\,.$$

Da $f(z)$ auf ganz z holomorph ist, können wir den Radius R beliebig groß wählen, also muß $f'(z)$ überall verschwinden. Dann muß aber f selbst konstant sein. ■

JOSEPH LIOUVILLE (1809–1882) war Sohn eines Kapitäns aus NAPOLEONS Armee. Er kam 1825 an die Ecole Polytechnique, wo er unter anderem Vorlesungen von AMPÈRE hörte. 1831 wurde er Assistent bei AMPÈRES Nachfolger MATHIEU; später lehrte er unter anderem am Collège de France und an der Ecole Polytechnique. Nach der 1848er Revolution war er (als gemäßigter Republikaner) kurz Mitglied der Nationalversammlung. Seine über 400 Arbeiten befassen sich unter anderem mit der Zahlentheorie, mit Differentialgleichungen, Differentialoperatoren, Differentialgeometrie, Statistischer Mechanik und Astronomie.

Der Satz von LIOUVILLE zeigt wieder einmal, wie deutlich sich reelle und komplexe Differenzierbarkeit unterscheiden: Im Reellen kennen wir schließlich eine ganze Reihe beschränkter Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, von denen viele nicht nur beliebig oft differenzierbar, sondern auch analytisch, d.h. um jeden Punkt durch eine Potenzreihe darstellbar sind: Bekannte Beispiele sind etwa

$$f(x) = \arctan x, \qquad g(x) = \frac{1}{x^2+1} \quad \text{und} \quad h(x) = e^{-x^2}\,.$$

Die erste dieser Funktionen ist nicht als stetige Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ definierbar, und die beiden anderen sind zwar holomorph auf ganz $\mathbb{C}$, aber im Komplexen nicht mehr beschränkt: $g(z)$ geht für $z \to \pm i$ gegen Unendlich, und $h(z)$ wegen $h(ix) = e^{x^2}$ für Argumente mit immer größer werdendem Imaginärteil.

Ein Polynom $f(z)$ ist natürlich auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph; es ist allerdings i.a. nicht beschränkt. Wenn es aber keine Nullstellen hat, ist auch $1/f(z)$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph, und diese Funktion *ist* beschränkt: Für konstantes f ist das trivial, und für ein nichtkonstantes Polynom ist stets

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty, \quad \text{also} \quad \lim_{z\to\infty} \frac{1}{f(z)} = 0\,.$$

Somit gibt es zu jeder positiven Zahl M_1 einen Radius $R > 0$, so daß $|1/f(z)| < M_1$ für $|z| > R$.

Die Kreisscheibe $\left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| \le R\right\}$ ist abgeschlossen und beschränkt, also muß dort die stetige Funktion $|1/f(z)|$ ihr Maximum M_2 annehmen, und für das Maximum M der beiden Werte M_1 und M_2 gilt

$$\left|\frac{1}{f(z)}\right| \le M \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}\,.$$

Nach dem Satz von LIOUVILLE ist daher $1/f(z)$ konstant, also auch $f(z)$ selbst. Damit folgt der

Fundamentalsatz der Algebra: *a)* Jedes nichtkonstante Polynom f mit komplexen Koeffizienten hat mindestens eine komplexe Nullstelle.
b) Genauer läßt sich ein komplexes Polynom vom Grad n schreiben als

$$f(z) = a(z-z_1)^{e_1}(z-z_2)^{e_2}\cdots(z-z_r)^{e_r}$$

mit $a, z_\nu \in \mathbb{C}$ und $e_1 + e_2 + \cdots + e_r = n$.

Zum *Beweis* müssen wir nur noch *b)* betrachten; wir zeigen diese Aussage durch vollständige Induktion nach dem Grad von f.

Ein Polynom vom Grad Null ist konstant, d.h. $f(z) = a$, und das ist bereits von der gewünschten Form. Auch die Summenformel gilt in diesem Fall trivialerweise.

Für $n > 0$ hat f mindestens eine Nullstelle $z_0 \in \mathbb{C}$. Diese können wir abdividieren, d.h. wir dividieren das Polynom $f(z)$ mit Rest durch $z - z_0$:

$$f(z) : (z - z_0) = g(z) \quad \text{Rest } R(z)\,.$$

Dabei hat der Rest $R(z)$ kleineren Grad als der Divisor $(z - z_0)$, d.h. $R(z) = c$ ist ein konstantes Polynom. Somit ist

$$f(z) = (z - z_0)g(z) + R(z) = (z - z_0)g(z) + c$$

mit einer komplexen Zahl c. Speziell für $z = z_0$ erhalten wir die Beziehung

$$f(z_0) = c\,;$$

da z_0 eine Nullstelle von f ist, folgt $c = 0$ und

$$f(z) = (z - z_0)g(z)\,.$$

Damit ist $g(z)$ ein Polynom vom Grad $n - 1$, auf das wir die Induktionsvoraussetzung anwenden können:

$$g(z) = a(z - z_1)^{e_1}(z - z_2)^{e_2} \cdots (z - z_r)^{e_r}$$

mit $a, z_\nu \in \mathbb{C}$ und $e_1 + e_2 + \cdots + e_r = n - 1$ und

$$f(z) = a(z - z_0)(z - z_1)^{e_1}(z - z_2)^{e_2} \cdots (z - z_r)^{e_r}\,.$$

Unabhängig davon, ob z_0 gleich einem der anderen z_i ist oder nicht ist das eine Darstellung der verlangten Form, in der sich die Exponenten zu n ergänzen, und damit ist der Satz bewiesen. ■

Die Aussage über die Summe der Exponenten kann auch so interpretiert werden, daß ein komplexes Polynom vom Grad n mit Vielfachheiten gerechnet genau n Nullstellen hat.

Für reelle Polynome folgt:

Korollar: Jedes reelle Polynom $f(x)$ läßt sich schreiben als Produkt

$$f(x) = a(x - x_1)^{e_1} \cdots (x - x_r)^{e_r} q_1^{d_1} \cdots q_s^{d_s}$$

mit reellen Zahlen a, x_ν und quadratischen reellen Polynomen q_μ, die keine reelle Nullstellen haben. Dabei ist

$$\deg f = \sum_{\nu=1}^{r} e_\nu + 2\sum_{\mu=1}^{s} d_\mu\,.$$

Beweis: Über den komplexen Zahlen zerfällt f in Linearfaktoren. Die Linearfaktoren zu reellen Nullstellen können einfach übernommen werden. Im Falle einer komplexen Nullstelle z_μ ist, da f reelle Koeffizienten hat, auch $\overline{z_\mu}$ eine Nullstelle derselben Vielfachheit, und

$$q_\mu = (z - z_\mu)(z - \overline{z_\mu}) = z^2 - (2\,\mathfrak{Re}\, z_\mu)z + |z_\mu|^2$$

ist ein quadratisches Polynom mit reellen Koeffizienten, aber ohne reelle Nullstelle. ■

j) Der Residuensatz

Der CAUCHYsche Integralsatz gilt nicht für meromorphe Funktionen: Wie wir oben gesehen haben, liefert bereits $f(z) = 1/z$ ein Gegenbeispiel. In gewisser Weise ist das aber bereits das *einzige* Gegenbeispiel: Für $n \geq 2$ hat $1/z^n$ die Stammfunktion $1/(n-1)z^{n-1}$, und die ist auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ definiert, d.h.

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^n} = 0$$

für jede geschlossene Kurve γ, die nicht durch 0 geht. Falls daher eine Funktion im durch γ begrenzten Bereich G nur eine einzige Polstelle z_0 hat und der Hauptteil dort gleich

$$H(z) \underset{\text{def}}{=} \sum_{k=-n}^{-1} a_k (z - z_0)^k$$

ist, können wir $f(z) = g(z) + H(z)$ zerlegen in diesen Hauptteil und eine in ganz G holomorphe Funktion $g(z)$. Nach dem CAUCHYschen Integralsatz ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma g(z)\,dz + \int_\gamma H(z)\,dz = \int_\gamma H(z)\,dz\,.$$

Dies läßt sich weiter ausrechnen als

$$\int_\gamma H(z) = \sum_{k=1}^{n} a_{-k} \frac{dz}{(z-z_0)^k} = a_{-1} \int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i a_{-1}\,.$$

Von daher ist klar, daß der Koeffizient a_{-1} eine besondere Rolle spielt und einen eigenen Namen verdient:

Definition: *a)* Für eine meromorphe Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ mit LAURENT-Reihe $\sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ um die Polstelle z_0 heißt der Koeffizient a_{-1} von $1/(z-z_0)$ das *Residuum* von f im Punkt z_0; in Zeichen

$$a_{-1} = \operatorname{Res}_{z_0} f\,.$$

Demnach ist also in der obigen Situation

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{z_0} f\,.$$

Allgemein gilt der

Residuensatz: Die Funktion f sei meromorph in $D \subseteq \mathbb{C}$ und γ sei eine ganz in D liegende Kurve, die Rand eines beschränkten Gebiets G sei und auf der f keine Pole habe. Dann hat f in G nur endlich viele Polstellen $z_1, \dots, z_r$, und

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{r} \operatorname{Res}_{z_k} f\,.$$

Beweis: Der Abschluß $\overline{G}$ von G ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt; daher hat jede unendliche Teilmenge von $\overline{G}$ (mindestens) einen Häufungspunkt. Da die Polstellen einer meromorphen Funktion nach Definition keinen Häufungspunkt haben dürfen, kann es nur endlich viele Polstellen $z_1, \dots, z_r$ geben; die zugehörigen Hauptteile seien $H_1(z), \dots, H_r(z)$. Dann ist

$$g(z) \underset{\text{def}}{=} f(z) - H_1(z) - \cdots - H_r(z)$$

eine holomorphe Funktion, also ist nach dem CAUCHYschen Integralsatz

$$0 = \int_\gamma g(z)\,dz = \int_\gamma f(z) - \sum_{k=1}^{r} \int_\gamma H_k(z)\,dz$$

oder

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{r} \int_\gamma H_k(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{r} \operatorname{Res}_{z_k} f\,,$$

genau wie oben im Fall einer einzigen Polstelle. ∎

Der Residuensatz kann ein sehr nützliches Hilfsmittel für die Berechnung von Integralen sein, da sich die Residuen im allgemeinen viel einfacher berechnen lassen, als ein Kurvenintegral: Da das Residuum im Punkt z_0 der Koeffizient von $(z-z_0)^{-1}$ ist, ist beispielsweise für einen Pol *erster* Ordnung das Residuum der konstante Term der TAYLOR-Reihe von $(z-z_0)f(z)$, also einfach

$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z)\,.$$

Bei Polen höherer Ordnung divergiert dieser Ausdruck; wir können aber beispielsweise bei einem Pol n-ter Ordnung zunächst den Koeffizienten a_{-n} berechnen als

$$a_{-n} = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)^n f(z)\,;$$

dann ist $f(z) - \dfrac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ eine meromorphe Funktion, die bei z_0 höchstens einen Pol der Ordnung $n-1$ hat und deren LAURENT-Koeffizienten abgesehen von a_{-n} mit denen von f übereinstimmen.

Auf diese Weise läßt sich rekursiv der Hauptteil von f berechnen, was meist erheblich einfacher ist als die Auswertung der Integraldarstellungen der Koeffizienten.

Als erste Anwendung des Residuensatzes betrachten wir

$$\int_\gamma \frac{z^5+1}{z^4-1}\,dz \quad \text{für } \gamma\colon \begin{cases} [0,2\pi] \to \mathbb{C} \\ \qquad t \mapsto 2e^{it} \end{cases} .$$

Der Nenner hat die vier Nullstellen ± 1 und $\pm i$, die allesamt im Innern des Kreises mit Radius zwei um den Nullpunkt liegen, über den wir integrieren. $z = -1$ ist allerdings auch Nullstelle des Zählers, und

$$\lim_{z\to -1} \frac{z^5+1}{z^4-1} = \lim_{z\to -1} \frac{5z^4}{4z^3} = \lim_{z\to -1} \frac{5z}{4} = -\frac{5}{4}$$

existiert in $\mathbb{C}$; Pole gibt es also nur für $+1$ und $\pm i$. Diese Pole haben allesamt Ordnung eins, da es sich um einfache Nullstellen des Nenners handelt. Also ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_1 f &= \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{(z^5+1)(z-1)}{(z+1)(z-1)(z^2+1)} \\ &= \lim_{z\to 1} \frac{z^5+1}{(z+1)(z^2+1)} = \frac{2}{2\cdot 2} = \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

Genauso bestimmt man

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_i f &= \lim_{z\to i} \frac{z^5+1}{(z^2-1)(z+i)} \\ &= \frac{i^5+1}{(i^2-1)(i+i)} = \frac{i+1}{-4i} = \frac{-1+i}{4} \end{aligned}$$

und

$$\operatorname{Res}_{-i} f = \frac{(-i)^5+1}{\big((-i)^2-1\big)(-i-i)} = \frac{1-i}{-2\cdot(-2i)} = \frac{-1-i}{4} .$$

Die Summe der drei Residuen ist Null, also verschwindet nach dem Residuensatz auch das Integral.

Man beachte, daß wir dieses Ergebnis nicht ohne weiteres über eine Stammfunktion bekommen hätten, denn die Stammfunktion

$$\frac{z^2}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{Ln}(z-1) - \frac{1}{4}\operatorname{Ln}(z^2+1) - \frac{1}{2}\arctan z$$

ist gleich an mehreren Stellen des Integrationswegs unstetig: Für $z = -2$ überquert das Argument von $\operatorname{Ln}(z-1)$ die negative reelle Achse, und für $z = \pm 2i$ das von $\operatorname{Ln}(z^2+1)$. Auch läßt sich der Arkustangens nicht als holomorphe Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ definieren und sorgt so für zusätzliche Probleme.

Auf den ersten Blick erstaunlich, gerade für Anwendungen in der Elektrotechnik aber wichtig ist die Tatsache, daß sich auch eine ganze Reihe von bestimmten Integrale im Reellen am einfachsten über den Residuensatz berechnen lassen. Betrachten wir etwa als erstes Beispiel

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} .$$

Natürlich können wir via Partialbruchzerlegung eine Stammfunktion des Integranden finden, allerdings müssen wir dafür doch einiges arbeiten, und das Ergebnis

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}\,x+1}{x^2+\sqrt{2}\,x+1} \\ &\quad + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}\,x+1) + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}\,x-1) \end{aligned}$$

ist alles andere als angenehm.

Um auch dieses Integral über den Residuenkalkül ausrechnen zu können, setzen wir den Integranden fort zu einer komplexen Funktion

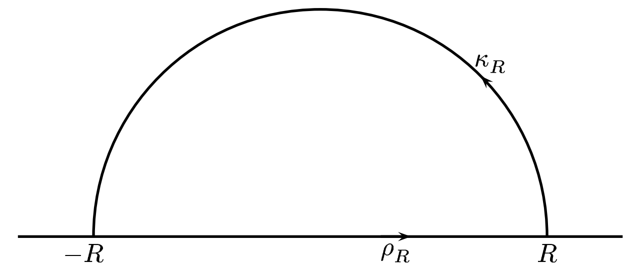
$$f(z) = \frac{1}{z^4+1} ;$$

diese ist holomorph in allen Punkten $z \in \mathbb{C}$, in denen der Nenner z^4+1 nicht verschwindet.

Nach der dritten binomischen Formel ist $(z^4+1)(z^4-1) = (z^8-1)$, also
$$z^4 + 1 = \frac{z^8-1}{z^4-1}\,.$$
Die Nullstellen des Polynoms $z^n - 1$ sind jene komplexen Zahlen, deren n-te Potenz gleich Eins ist; man bezeichnet sie als die n-ten Einheitswurzeln. Da ein Polynom vom Grad n über einem Körper höchstens n Nullstellen haben kann, gibt es höchstens n von ihnen geben; da für jede natürliche Zahl k
$$\left(e^{2k\pi i/n}\right)^n = e^{n\cdot 2k\pi i/n} = e^{2k\pi i} = 1$$
ist, gibt es genau die n Einheitswurzeln
$$1 = e^0, \quad e^{2k\pi i/n}, \quad e^{4k\pi i/n}, \quad \dots, \quad e^{(n-1)\cdot 2\pi i/n}\,.$$
Ist m ein Teiler von n, so befinden sich darunter auch die sämtlichen m-ten Einheitswurzeln; eine n-Einheitswurzel, die für keinen Teiler m von n gleichzeitig m-te Einheitswurzel ist, bezeichnen wir als *primitive n-te Einheitswurzel.*

Eine achte Einheitswurzel ist offenbar genau dann primitiv, wenn sie nicht gleichzeitig vierte Einheitswurzel ist; die Nullstellen von z^4+1 sind also genau die primitiven achten Einheitswurzeln
$$e^{\pi i/4}, \quad e^{3\pi i/4}, \quad e^{5\pi i/4} \quad \text{und} \quad e^{7\pi i/4}\,.$$

Wir betrachten nun für $R > 0$ einen Integrationsweg γ_R, der zusammengesetzt ist aus dem eigentlich interessierenden reellen Integrationsweg
$$\rho_R\colon \begin{cases} [-R,R] \to \mathbb{C} \\ \qquad t \mapsto t \end{cases}$$
von $-R$ bis R und einem Halbkreis
$$\kappa_R\colon \begin{cases} [0,\pi] \to \mathbb{C} \\ \qquad t \mapsto Re^{it} \end{cases}$$
in der oberen Halbebenen von $\mathbb{C}$, der von R im Gegenuhrzeigersinn nach $-R$ führt.



Beides zusammen bildet eine geschlossene Kurve, und Polstellen des Integranden gibt es nur bei den primitiven achten Einheitswurzeln, von denen allerdings nur $e^{\pi i/4}$ und $e^{3\pi i/4}$ im Halbkreis liegen. Nach dem Residuensatz ist daher für $R > 1$
$$\int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i\left(\operatorname{Res}_{e^{\pi i/4}} f + \operatorname{Res}_{e^{3\pi i/4}} f\right).$$

Die Residuen lassen sich wie oben bestimmen:
$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{e^{\pi i/4}} f &= \lim_{z\to e^{\pi i/4}} \frac{z-e^{\pi i/4}}{z^4+1} \\
&= \lim_{z\to e^{\pi i/4}} \frac{z-e^{\pi i/4}}{(z-e^{\pi i/4})(z+e^{\pi i/4})(z-e^{3\pi i/4})(z+e^{3\pi i/4})} \\
&= \frac{1}{2e^{\pi i/4}(e^{\pi i/4}-e^{3\pi i/4})(e^{\pi i/4}+e^{3\pi i/4})} \\
&= \frac{1}{2e^{\pi i/4}(e^{\pi i/2}-2e^{3\pi i/2})} \\
&= \frac{1}{2e^{\pi i/4}\big(i-(-i)\big)} = \frac{e^{-\pi i/4}}{4i} = \frac{\frac12(\sqrt2-\sqrt2\,i)}{4i} \\
&= \frac{\sqrt2}{8}(-1-i)\,.
\end{aligned}$$

Genauso berechnet man $\operatorname{Res}_{e^{\pi i/4}} f = \frac{\sqrt{2}}{8}(1-i)$, insgesamt ist also

$$\int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot (-2i) \cdot 2\pi i = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi .$$

Was uns wirklich interessiert ist allerdings nicht das Integral über γ_R, sondern das über ρ_R; wir können es aus dem über γ_R berechnen, wenn wir das Integral über den Halbkreisbogen κ_R kennen. Dieses Integral kennen wir zwar nicht, aber wir wissen, daß es für $R \to \infty$ gegen Null geht, denn

$$\int_{\kappa_R} \frac{dz}{z^4+1} = \int_0^\pi \frac{iRe^{it}}{R^4 e^{4it}+1}\, dt ,$$

und der Integrand rechts geht für $R \to \infty$ überall gegen Null, also auch das Integral über das endliche Intervall $[0, \pi]$. Somit ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z^4+1} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dz}{z^4+1} = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^4+1} - \lim_{R\to\infty} \int_{\kappa_R} \frac{dz}{z^4+1}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\pi .$$

Ähnlich kann man bei anderen uneigentlichen Integralen vorgehen, vorausgesetzt der Integrand hat keine Polstellen auf der reellen Achse, die Residuen der Polstellen in der oberen Halbebene sind bekannt und das Integral über den Halbkreisbogen κ_R kann zumindest für $R \to \infty$ bestimmt werden.

Genauso kann man natürlich mit der unteren Halbebene argumentieren; man muß dabei nur beachten, daß der geschlossene Integrationsweg dann *im Uhrzeigersinn* durchlaufen wird, so daß der Wert des Integrals dann $-2\pi i$ mal der Residuensumme ist.

Ob man im konkreten Fall lieber mit der oberen oder der unteren Halbebene arbeitet, wird in erster Linie davon abhängen, wo man die Residuen einfacher bestimmen kann; im Zweifelsfall wird man die Halbebene

wählen, in der weniger Polstellen liegen. Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß die obige Methode nicht anwendbar ist, wenn der Integrand Nullstellen auf der reellen Achse selbst hat, denn wir wissen nicht, wie man ein komplexes Integral berechnet, dessen Integrand auf dem Integrationsweg eine Polstelle hat.

Gelegentlich läßt sich ein reelles Integral auch über eine direkte Substitution in ein komplexes Integral über eine geschlossene Kurve überführen, beispielsweise kann ein Integral von 0 bis 2π über einen Ausdruck in $\sin t$ und $\cos t$ manchmal direkt als komplexes Integral über eine Kreislinie interpretiert und dann nach dem Residuensatz ausgerechnet werden; wie man solche Substitutionen findet, ist wie üblich Erfahrungssache, auch wenn es dazu einige Faustregeln gibt.

Als ein Beispiel dazu betrachten wir das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx ,$$

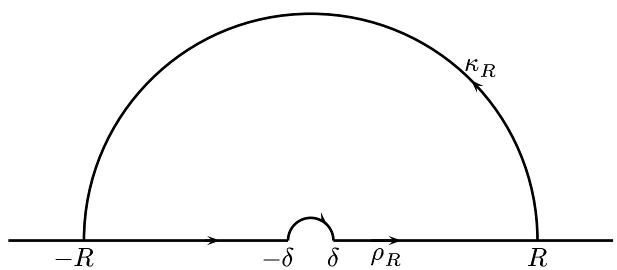
das wir beispielsweise bei der Untersuchung der Konvergenz von FOURIER-Reihen benötigen werden. Es hat auch sonst viele Anwendungen, denn der Integrand, die sogenannte sinc-Funktion spielt in der Elektrotechnik eine große Rolle als, wie wir im entsprechenden Teil der Vorlesung sehen werden, FOURIER-Transformierte eines Rechteckimpulses.

Da wir $\frac{\sin z}{z}$ auf einem Kreis um den Nullpunkt für immer größer werdenden Radius nicht abschätzen können, hat es keinen Sinn, das Integral über einen Halbkreis zu berechnen – ganz abgesehen davon, daß es wegen der Holomorphie des Integranden ohnehin verschwindet.

Wie sich zeigen wird, kommen wir ans Ziel, wenn wir den CAUCHYschen Hauptwert des etwas allgemeineren Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{t}\, dt$$

für ein reelles $\omega > 0$ berechnen, wobei im Augenblick nur der Fall $\omega = 1$ interessant ist. Dazu betrachten wir, der Philosophie dieses Abschnitts entsprechend, ein komplexes Kurvenintegral über $e^{i\omega z}/z$. Da der Integrand an der Stelle $z = 0$ eine Polstelle hat, können wir allerdings nicht einfach auf der reellen Achse von $-R$ nach R integrieren, sondern müssen den Nullpunkt auf einem kleinen Halbkreisbogen β_δ vom Radius δ umfahren. Diese Umleitung wird im Uhrzeigersinn durchlaufen:



Für $z = x + iy$ hat $e^{i\omega z} = e^{-\omega y} e^{i\omega x}$ Betrag $e^{-\omega y}$. Damit ist

$$\left| \int_{\kappa_R} \frac{e^{iz}}{z}\, dz \right| = \left| \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}} \cdot iRe^{it}\, dt \right| \le \int_0^\pi \left| \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}} \cdot iRe^{it} \right| dt$$

$$= \int_0^\pi e^{-R\sin t}\, dt\,.$$

Um die rechte Seite weiter abzuschätzen, wählen wir ein $\eta > 0$ und schreiben

$$\int_0^\pi e^{-R\sin t}\, dt = \int_0^\eta e^{-R\sin t}\, dt + \int_\eta^{\pi-\delta} e^{-R\sin t}\, dt + \int_{\pi-\eta}^\pi e^{-R\sin t}\, dt\,.$$

Im ersten und im drittem Integral schätzen wir den Integranden ab durch eins und erhalten somit η als obere Schranke für das Integral; beim mittleren Integral ist der Integrand höchstens gleich $e^{-R\sin\eta}$. Wählen wir nun für ein $\varepsilon > 0$ den Winkel δ so, daß $\eta < \frac{1}{3}\varepsilon$ ist, und wählen wir dazu den Radius R so groß, daß

$$e^{-R\sin\eta} < \frac{\varepsilon}{3\pi}$$

ist, erhalten wir die Abschätzung

$$\left| \int_{\kappa_R} \frac{e^{iz}}{z}\, dz \right| \le 2\eta + (\pi - 2\eta)\, e^{-R\sin\eta} < \varepsilon\,.$$

Somit verschwindet auch hier das Integral längs κ_R für $R \to \infty$.

Für $R \to \infty$ verschwindet damit auf Grund des CAUCHYschen Integralsatzes auch

$$\int_{-\infty}^{\delta} \frac{e^{i\omega z}}{z}\, dz + \int_{\beta_\delta} \frac{e^{i\omega z}}{z}\, dz + \int_\delta^\infty \frac{e^{i\omega z}}{z}\, dz$$

d.h. der CAUCHYsche Hauptwert des Integrals von $-\infty$ nach ∞ ist gleich

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{\alpha_\delta} \frac{e^{i\omega z}}{z}\, dz\,,$$

wobei α_δ den im *Gegenuhrzeigersinn* durchlaufenen Halbkreisbogen β_δ bezeichnet. In der Summenentwicklung

$$\int_{\alpha_\delta} \frac{e^{i\omega z}}{z} = \int_{\alpha_\delta} \sum_{k=0}^\infty \frac{(i\omega)^k z^{k-1}}{k!}\, dz = \sum_{k=0}^\infty \frac{(i\omega)^k}{k!} \int_{\alpha_\delta} z^{k-1}\, dz$$

ist das rechtsstehende Integral für $k = 0$

$$\int_{\alpha_\delta} z^{-1}\, dz = \mathrm{Ln}(\delta) - \mathrm{Ln}(-\delta) = \mathrm{Ln}(-1) = -\pi i$$

unabhängig von δ; im Falle $k \neq 0$ verschwindet

$$\int_{\alpha_\delta} z^{k-1}\, dz = \frac{\delta^k - (-\delta)^k}{k}$$

für gerade k und ist gleich $2\delta^k/k$ für ungerade k. Da die geometrische Reihe $2\sum_{k=1}^\infty \delta^k$ eine konvergente Majorante der Summe aller solcher Terme ist und für $\delta \to 0$ gegen Null geht, folgt

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\omega t}}{t}\, dt = \lim_{\delta\to 0} \int_{\alpha_\delta} \frac{e^{i\omega z}}{z}\, dz = \pi i\,.$$

Vergleich der Imaginärteile zeigt, daß dann für den CAUCHYschen Hauptwert gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega t}{t}\, dt = \pi \quad \text{für alle } \omega > 0\,.$$

Tatsächlich kann man sich leicht überlegen, daß dies nicht nur der CAUCHYsche Hauptwert ist, sondern daß dieses uneigentliche Integral existiert und somit den Wert π hat.

k) Harmonische Funktionen

Wie wir gesehen haben, ist (stetige) Differenzierbarkeit im Komplexen eine erheblich stärkere Forderung ist als im Reellen. Die vielen schönen Eigenschaften einer holomorphen Funktion sollten ihre Auswirkungen auf deren Real- und Imaginärteil haben, reelle Funktionen, die als Real- oder Imaginärteil einer holomorphen Funktion aufgefaßt werden können, sollten also interessante analytische Eigenschaften haben. Beispielsweise ist eine holomorphe Funktion beliebig oft stetig differenenzierbar; also gilt dies auch für ihren Real- und Imaginärteil.

Wenn die zweifach differenzierbare Funktion $u(x,y)$ Realteil einer holomorphen Funktion ist und $v(x,y)$ der zugehörige Imaginärteil, so ist nach den CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen

$$u_x(x,y) = v_y(x,y) \quad \text{und} \quad u_y(x,y) = -v_x(x,y)\,,$$

also folgt nach dem Lemma von SCHWARZ, daß

$$u_{xx}(x,y) = v_{yx}(x,y) = v_{xy}(x,y) = -u_{yy}(x,y)\,,$$

d.h.

$$\Delta u(xy) = u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) \equiv 0\,.$$

Der LAPLACE-Operator, angewandt auf den Realteil einer holomorphen Funktion, liefert also die Nullfunktion.

Die Gleichung $\Delta u = 0$ dürfte den meisten aus der Physik in Erinnerung sein: Ist u ein elektrisches Potential und $\vec{E} = \nabla u$ das zugehörige elektrische Feld, so ist $\Delta u = \operatorname{div} E$, die sogenannte *Kontinuitätsgleichung*

$\Delta u = 0$ besagt also, daß ∇u ein quellenfreies Feld ist; es gibt also keine Ladungen.

Solche Funktionen spielen nicht nur in der Elektrodynamik eine Rolle, sondern beispielsweise auch bei der Wärmeleitung und einer ganze Reihe weiterer Anwendungen; sie haben daher einen eigenen Namen verdient (und eine umfangreiche Theorie, die sich mit ihren Eigenschaften beschäftigt).

Definition: Eine Funktion $u \in \mathcal{C}^2(D,\mathbb{R})$ heißt *harmonisch* auf der offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$, wenn dort überall gilt

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0\,.$$

Im Zweidimensionalen hängt dies eng mit holomorphen Funktionen zusammen:

Lemma: *a)* Realteil und Imaginärteil einer holomorphen Funktion sind harmonisch.
b) Zu jeder harmonischen Funktion $u\colon D \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ gibt es für jeden Punkt $(a,b) \in D$ eine Umgebung U und eine auf U holomorphe Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$, so daß u auf U der Realteil von f ist.

Beweis: a) Wir haben bereits nachgerechnet, daß der Realteil einer holomorphen Funktion f harmonisch ist; da mit f auch $-if$ holomorph ist und den Imaginärteil von f als Realteil hat, gilt dasselbe für den Imaginärteil.

b) Wir betrachten das Vektorfeld

$$\vec{V}(x,y) = \begin{pmatrix} -u_y(x,y) \\ u_x(x,y) \end{pmatrix}$$

auf einer einfach zusammenhängenden Teilmenge $U \subseteq D$, die den Punkt (a,b) enthält, z.B. eine Kreisscheibe um (a,b), die noch ganz in D liegt. Da

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial x} = -u_{yy} - u_{xx} = -\Delta u = 0$$