Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515 A5, C201

18. März 2004

Nachklausur Höhere Mathematik II

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *je zwei Punkte*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: $f(z) = e^{\cos z}$ ist eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion.

Lösung: *Richtig,* denn f entsteht durch Hintereinanderausführung aus der holomorphen Exponentialfunktion und dem holomorphen Kosinus.

2) Was ist $\displaystyle\int_\kappa \frac{dz}{z(z+10)}$ für den im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen Kreisbogen κ um Null mit Radius drei?

Lösung: Der Integrand ist meromorph mit Polen bei $z = 0$ und $z = -10$; von diesen liegt nur $z = 0$ im Innern des von κ berandeten Kreises. Nach dem Residuensatz ist das Integral daher gleich $2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} \dfrac{1}{z(z+10)} = \dfrac{2\pi i}{10} = \dfrac{\pi i}{5}$.

3) Richtig oder falsch: Das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \dot x(t) \\ \dot y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

hat mindestens eine Lösung der Form $x(t) = ate^{bt}$ mit geeigneten Konstanten a, b.

Lösung: *Falsch,* denn $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ hat die beiden verschiedenen Eigenwerte eins und drei, ist also diagonalisierbar, und die Exponentialfunktion, angewandt auf die diagonalisierte Matrix, liefert eine Diagonalmatrix mit Einträgen e^t und e^{3t}. Somit ist jede Lösung Linearkombination von e^t und e^{3t}.

4) Richtig oder falsch: Die $n \times n$-Matrix A mit $a_{k\ell} = i(k-\ell)$ hat lauter reelle Eigenwerte.

Lösung: *Richtig,* denn $a_{\ell k} = i(\ell - k)$ ist konjugiert komplex zu $a_{k\ell} = i(k-\ell)$, d.h. die Matrix ist Hermitesch.

5) Welche Nullstellen hat das Polynom $f(x) = x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36$?

Lösung: Das Produkt aller Nullstellen ist 36 und ihre Summe null; *falls* alle Nullstellen ganzzahlig sein sollten, kämen nur $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm12$ und ±18 in Frage. (Tatsächlich wissen wir erheblich mehr: Da f nur gerade Potenzen enthält, müssen auch die Nullstellen*quadrate* Teiler von 36 sein, mit jeder Nullstelle x ist auch $-x$ Nullstelle, so daß es drei Nullstellenpaare $\pm x_1, \pm x_2, \pm x_3$ gibt, wobei die Summe der x_i^2 gleich 14 sein muß.)

$$f(\pm1) = 1 - 14 + 49 + 36 = 0$$
$$f(\pm2) = 64 - 14 \cdot 16 + 49 \cdot 4 - 36 = 4(16 - 4 \cdot 14 + 49 - 9) = 0\,;$$

damit sind vier Nullstellen gefunden. Da die noch fehlenden zwei entgegengesetzt gleich sein müssen (f ist gerade) und das Produkt aller sechs Nullstellen 36 ist, muß auch noch $f(\pm 3)$ verschwinden.

6) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(3)}(t) - 3\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) - y(t) = 0\,!$$

Lösung: Die charakteristische Gleichung $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3 = 0$ hat die dreifache Wurzel $\lambda = 1$; die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung ist somit $y(t) = (a + bt + ct^2)e^t$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

7) Sie messen dieselbe physikalische Größe x fünfmal mit Ergebnissen $x_i = 8, 9, 10, 11, 12$. Was ist ihr bester Schätzwert für x, und mit welcher Genauigkeit (Standardabweichung) kennen Sie x?

Lösung: Der beste Schätzwert ist das arithmetische Mittel zehn; die Summe der quadratischen Abweichungen davon ist $2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 1^2 = 10$, also ist der Fehler des arithmetischen Mittels

$$\sigma = \sqrt{\frac{10}{5-1}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \approx 1{,}5811\,.$$

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{16x^2}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx\,!$

Lösung: Bei Integralen einer solchen Bauart führt meist der Umweg über die komplexen Zahlen am schnellsten zu Erfolg. Dazu müssen wir die Pole des Integranden kennen, also zunächst die Nullstellen des Nenners.

Das Nennerpolynom $(x^2 + 1)(x^2 + 9)$ verschwindet für $x = \pm i$ und $x = \pm 3i$.

Der Integrationsweg γ_R sei der Halbkreis um den Nullpunkt vom Punkt R durch die obere Halbebene zum Punkt $-R$; in Formeln also $\gamma_R\colon [0, \pi] \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto Re^{it}$.

δ_R sei der Integrationsweg, der mit γ_R beginnt und dann entlang der reellen Achse von $-R$ nach R geht. Damit ist δ_R eine geschlossene Kurve, und Integrale entlang δ_R können nach dem Residuensatz berechnet werden.

Für $R > 3$ liegen im Innern des von δ_R berandeten Halbkreises die beide Pole $z_1 = i$ und $z_2 = 3i$. Beide sind Pole erster Ordnung, d.h.

$$\operatorname*{Res}_{z=z_\nu} \frac{16z^2}{(z^2+1)(z^2+9)} = \lim_{z\to z_\nu} \frac{16(z-z_\nu)z^2}{(z^2+1)(z^2+9)}\,.$$

Damit ist

$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{16z^2}{(z^2+1)(z^2+9)} = \lim_{z\to i} \frac{16z^2}{(z+i)(z^2+9)} = \frac{16i^2}{(2i)(i^2+9)} = \frac{-16}{16i} = i$$

und

$$\operatorname*{Res}_{z=3i} \frac{16z^2}{(z^2+1)(z^2+9)} = \lim_{z\to i} \frac{16z^2}{(z^2+1)(z+3i)} = \frac{16\cdot 9i^2}{(9i^2+1)(6i)} = \frac{-16\cdot 9}{-8\cdot 6i} = -3i\,.$$

Somit ist

$$\int\limits_{\delta_R} \frac{16z^2}{(z^2+1)(z^2+9)}\,dz = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{16z^2}{(z^2+1)(z^2+9)} + \operatorname*{Res}_{z=3i} \frac{16z^2}{(z^2+1)(z^2+9)} \right)$$
$$= 2\pi i\big(i - 3i\big) = 4\pi\,.$$

Das ist auch der Wert des gesuchten Integrals, denn für $R \to \infty$ geht wegen $\dot\gamma_R(t) = iRe^{it}$ der Integrand von

$$\int\limits_{\gamma_R} \frac{16z^2}{(z^2+1)(z^2+9)}\,dz = \int\limits_0^{\pi} \frac{16R^2e^{2it}\cdot iRe^{it}}{(R^2e^{2it}+1)(R^2e^{2it}+4)}\,dt$$

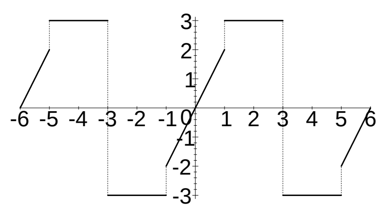
gegen Null, also – wegen des festen Integrationsintervalls $[0, \pi]$ – auch das Integral, so daß das Integral über δ_R für $R \to \infty$ gleich dem Integral über die reelle Achse wird.

Aufgabe 2: *(9 Punkte)*

Sei $f(t) = \begin{cases} 2t & \text{für } |t| \le 1 \\ 3 & \text{für } 1 < t \le 3 \\ -3 & \text{für } -3 \le t < -1 \end{cases}$, periodisch fortgesetzt mit Periode sechs.

a) Skizzieren Sie die Funktion f im Intervall $[-6, 6]$!

Lösung:



b) Ist f gerade, ungerade oder keins von beiden?

Lösung: Da das Intervall $[-3, 3]$, in dem f explizit vorgegeben ist, symmetrisch zum Nullpunkt liegt und die Funktion dort ungerade ist, ist auch f ungerade.

c) Berechnen Sie die reelle FOURIER-Reihe von f!

Lösung: Da f eine ungerade Funktion ist, gibt es nur Sinusterme. Zu deren Berechnung integrieren wir am besten über das Periodenintervall $[-3, 3]$, in dem wir Formeln für f haben. Außerdem können wir nochmals ausnutzen, daß f eine ungerade Funktion ist, so daß es reicht, von Null bis zwei zu integrieren und das Ergebnis zu verdoppeln; dies erspart zwei Integrationen. Damit erhalten wir

$$b_\ell = \frac{4}{6}\int\limits_0^3 f(t)\sin \ell\omega t\,dt = \frac{2}{3}\int\limits_0^1 t\sin \ell\omega t\,dt + \frac{2}{3}\int\limits_1^3 2\sin \ell\omega t\,dt$$
$$= \frac{2}{3}\,\frac{-t\cos \ell\omega t}{\ell\omega}\bigg|_0^1 + \frac{2}{3}\int\limits_0^1 \frac{\cos \ell\omega t}{\ell\omega}\,dt - \frac{2}{3}\,\frac{2\cos \ell\omega t}{\ell\omega}\bigg|_1^3$$
$$= -\frac{2}{3}\frac{\cos \ell\omega}{\ell\omega} + \frac{2}{3}\,\frac{\sin \ell\omega}{(\ell\omega)^2}\bigg|_0^1 - \frac{4}{3}\frac{\cos 3\ell\omega - \cos \ell\omega}{\ell\omega}$$
$$= \frac{2\cos \ell\omega - 4\cos 3\ell\omega}{3\ell\omega} + \frac{2\sin \ell\omega}{3(\ell\omega)^2}$$

Da f Periode sechs hat, ist die Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, wir werten also trigonometrische Funktionen bei Vielfachen von $\pi/3$ aus. Die entsprechenden Funktionswerte sind in der folgenden Tabelle zusammengefaßt:

$\ell \bmod 6$	0	1	2	3	4	5
$\cos \ell\omega$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\sin \ell\omega$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$2\cos \ell\omega - 4\cos 3\ell\omega$	-2	5	-5	2	-5	5
b_ℓ	$-\frac{2}{\ell\pi}$	$\frac{5}{\ell\pi} - \frac{3\sqrt{3}}{\ell^2\pi^2}$	$-\frac{5}{\ell\pi} - \frac{3\sqrt{3}}{\ell^2\pi^2}$	$\frac{2}{\ell\pi}$	$-\frac{5}{\ell\pi} - \frac{3\sqrt{3}}{\ell^2\pi^2}$	$\frac{5}{\ell\pi} - \frac{3\sqrt{3}}{\ell^2\pi^2}$

d) Für welche $t \in \mathbb{R}$ konvergiert diese gegen $f(t)$? Wohin konvergiert sie sonst?

Lösung: Die FOURIER-Reihe konvergiert zumindest überall dort gegen $f(t)$, wo f stetig ist, also überall außer bei den ungeraden ganzen Zahlen. Dort konvergiert die Reihe gegen den Mittelwert aus links-und rechtsseitigem Grenzwert, also gegen $\pm 2\frac{1}{2}$ für $t \equiv \pm 1 \bmod 6$ und gegen Null für $b \equiv 3 \bmod 6$.

e) Für welche $t \in \mathbb{R}$ tritt das GIBBS-Phänomen auf?

Lösung: Nur für die in *d)* bestimmten Sprungstellen, also die ungeraden ganzen Zahlen.

Aufgabe 3: *(3 Punkte)*

Was ist $\displaystyle\int_{-\infty}^{N} \sum_{k=1}^{\infty} \delta(t - 2^{-k})\, t \cos \pi k t \, dt$?

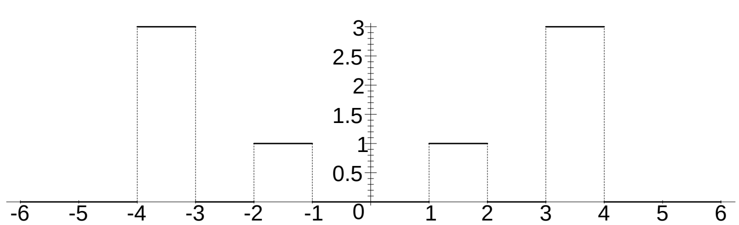
Lösung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \delta(t-2^{-k})\, t \cos \pi k t \, dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-2^{-k})\, t \cos \pi k t \, dt = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \cos k 2^{-k}\pi \approx 0{,}1500$$

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*

a) Skizzieren Sie die Funktion $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 1 \le |t| \le 2 \\ 3 & \text{für } 3 \le |t| \le 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$!

Lösung:



b) Berechnen Sie die FOURIER-Transformierte von f und geben Sie das Ergebnis in rein reeller Form an!

Lösung:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-4}^{-3} 3e^{-i\omega t}\,dt + \int_{-2}^{-1} e^{-i\omega t}\,dt + \int_{1}^{2} e^{-i\omega t}\,dt + \int_{3}^{4} 3e^{-i\omega t}\,dt \\
&= \frac{3i}{\omega}\left(e^{3i\omega} - e^{4i\omega} + e^{-4i\omega} - e^{-3i\omega}\right) + \frac{i}{\omega}\left(e^{i\omega} - e^{2i\omega} + e^{-2i\omega} - e^{-i\omega}\right) \\
&= \frac{6}{\omega}\left(\sin 4\omega - \sin 3\omega\right) + \frac{2}{\omega}\left(\sin 2\omega - \sin\omega\right) \\
&= \frac{6\sin 4\omega - 6\sin 3\omega + 2\sin 2\omega - 2\sin\omega}{\omega}\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 5: (*10 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

Lösung: Entwicklung nach der ersten Spalte gefolgt von Entwicklung nach der vierten Spalte) ergibt

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} &= (-2-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\
= (2+\lambda)^2 \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} &= (2+\lambda)^2\left((1+\lambda)^2 - 1\right) \\
= (2+\lambda)^2(\lambda^2 + 2\lambda) &= \lambda(2+\lambda)^3\,.
\end{aligned}$$

Es gibt also die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = -2$. Die algebraische Vielfachheit von λ_1 ist eins, die von λ_2 drei.

Damit ist klar, daß λ_1 auch die geometrischer Vielfachheit eins hat; da wir den Eigenvektor ohnehin gleich brauchen, können wir ihn gleich ausrechnen: Wie ein Blick die Matrix A zeigt, muß für einen solchen Vektor die vierte und damit auch die erste Komponente verschwinden; außerdem müssen die zweite und die dritte Komponente übereinstimmen. Ein möglicher Eigenvektor ist also

$$\vec{v}_1 = \vec{b}_2 + \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Im Falle von λ_2 müssen wir die Matrix

$$A + 2E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

betrachten. Für jeden Vektor $\vec{v}$ mit $(A + 2E)\vec{v} = \vec{0}$ muß daher die vierte Komponente verschwinden; die erste ist, wie man schon der Matrix A sofort ansieht, beliebig, und die beiden mittleren müssen entgegengesetzt gleich sein. Somit ist der Eigenraum zweidimensional; als Basisvektoren können wir beispielsweise

$$\vec{v}_2 = \vec{b}_2 - \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_3 = \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wählen. Insbesondere hat also $\lambda_2 = -2$ hat nur die geometrische Vielfachheit zwei.

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar?

Lösung: *Nein,* denn da die geometrische Vielfachheit von λ_2 kleiner ist als die algebraische, gibt es keine Basis des $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren von A.

c) Bezüglich welcher Basis hat A welche Dreiecksgestalt Δ?

Lösung: Um eine Basis von $\mathbb{R}^4$ zu finden, bezüglich derer die Matrix Dreiecksgestalt hat, brauchen wir noch einen Hauptvektor zweiter Stufe zu $\lambda_2 = -2$. Da

$$(A+E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist, haben wir nur noch die Bedingung, daß die Summe der beiden mittleren Komponenten verschwindet, während es keine Bedingung an die beiden verbleibenden Komponenten gibt. Eine von $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ linear unabhängige Lösung ist also zum Beispiel $\vec{v}_4 = \vec{b}_4$.
Dann ist $A\vec{v}_4 = A\vec{b}_4$ die vierte Spalte der Matrix A, also

$$A\vec{v}_4 = 2\vec{b}_1 - 2\vec{b}_4 = -2\vec{v}_4 + 2\vec{v}_3 ,$$

bezüglich der Basis aus den Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ hat A somit die Dreiecksgestalt

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} .$$

d) Berechnen Sie die Matrizen $e^{\Delta t}$ und e^{At}!

Lösung: Wir schreiben

$$\Delta = D + N \quad \text{mit} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;$$

offensichtlich ist N^2 die Nullmatrix. Da nach der allgemeinen Theorie $DN = ND$ ist, folgt

$$\begin{aligned} e^{\Delta t} &= e^{Dt}e^{Nt} = e^{Dt}(E+Nt) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} & 2te^{-2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Zur Berechnung von $e^{At} = B^{-1}e^{\Delta t}B$ müssen wir $e^{\Delta t}$ zurücktransformieren in die Standardbasis des $\mathbb{R}^4$. Die neuen Basisvektoren sind

$$\vec{v}_1 = \vec{b}_2 + \vec{b}_3, \quad \vec{v}_2 = \vec{b}_2 - \vec{b}_3, \quad \vec{v}_3 = \vec{b}_1 \quad \text{und} \quad \vec{v}_4 = \vec{b}_4\,;$$

die Matrix des Basiswechsels ist also $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Zur Berechnung ihrer Inversen ist es am einfachsten, die obigen Gleichungen umzukehren: Offensichtlich ist $\vec{b}_1 = \vec{v}_3$, $\vec{b}_2 = \frac{1}{2}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$, $\vec{b}_3 = \frac{1}{2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$ und $\vec{b}_4 = \vec{v}_4$, also

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 & te^{-2t} \\ 0 & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

e) Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$ mit den Anfangsbedingungen $y_1(0) = y_3(0) = 1$ und $y_2(0) = y_4(0) = -1$, und diskutieren Sie deren Langzeitverhalten! Ist dieses typisch für allgemeine Lösungen des Systems?

Lösung: Nach der allgemeinen Theorie ist

$$\vec{y}(t) = e^{At}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-t)e^{-2t} \\ -e^{-2t} \\ e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Für $t \to \infty$ geht sie gegen Null, was nicht ganz typisch ist: Da einer der Eigenwerte Null ist und der Rest negativ, konvergiert jede Lösung gegen eine Konstante, aber diese verschwindet nur für Anfangsbedingungen aus einem dreidimensionalen Teilraum des $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 6: (*8 Punkte*)

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y^{(4)}(t) - y(t) = 4t - 4 \quad \text{mit} \quad y(0) = 0 = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = y^{(3)}(0) = 0\,!$$

Lösung: Das ist ein reines Anfangswertproblem; für so etwas ist meist ein Ansatz via LAPLACE-Transformation gut geeignet. Für die LAPLACE-Transformierte $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$ der Lösungsfunktion gilt

$$(s^4 - 1)Y(s) = \mathcal{L}\{4t - 4\}(s) = \frac{4}{s^2} - \frac{4}{s} = \frac{4 - 4s}{s^2}\,;$$

also ist $Y(s) = \dfrac{4-4s}{(s^4-1)s^2} = \dfrac{4}{(s^4-1)s^2} - \dfrac{4}{(s^4-1)s}$. Nach dem Formelanhang ist

$$\mathcal{L}\{\cos\omega t + \cosh\omega t - 2\}(s) = \frac{2\omega^4}{(s^4 - \omega^4)s}\,;$$

dies wird für $\omega = 1$ zu $\mathcal{L}\{\cos t + \cosh t - 2\}(s) = \frac{2}{(s^4-1)s}$. Entsprechend wird

$$\mathcal{L}\{\sin\omega t + \sinh\omega t - 2\omega t\}(s) = \frac{2\omega^5}{(s^4 - \omega^4)s^2}$$

für $\omega = 1$ zu $\mathcal{L}\{\sin t + \sinh t - 2t\}(s) = \frac{2}{(s^4-1)s^2}$, also hat

$$y(t) = 2(\sin t + \sinh t - 2t) - 2(\cos t + \cosh t - 2) = 2\sin t - 2\cos t - 2e^{-t} + 4 - 4t$$

LAPLACE-Transformierte $Y(s)$ und ist somit Lösung des Anfangswertproblems.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 10y(t) = 60 + 100t\,!$$

Lösung: Zur Lösung der homogenen Gleichung brauchen wie die Wurzeln der charakteristischen Gleichung $\lambda^2+6\lambda+10 = (\lambda+3)^2+1 = 0$; das sind $-3\pm i$. Somit ist die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $\ddot{z}(t) + 6\dot{z}(t) + 10z(t) = 0$

$$z(t) = e^{-3t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) \quad \text{mit} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Nun brauchen wir noch eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Da deren rechte Seite linear in t ist, können wir es mit einem Ansatz der Form $y(t) = at + b$ probieren; dann ist $\dot{y}(t) = a$ und $\ddot{y}(t) = 0$, Einsetzen in die linke Seite der Differentialgleichung liefert also $6a + 10(at + b) = 10at + (10b + 6a)$. Dies soll $60 + 100t$ sein, also muß $a = 10$ und $b = 0$ gesetzt werden. Die gesuchte spezielle Lösung ist also $y(t) = 10t$ und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung wird zu

$$y(t) = 10t + e^{-3t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) \quad \text{mit} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

c) Welche Lösungen von *b)* sind beschränkt?

Lösung: Da $10t$ für $t \to \pm\infty$ nicht beschränkt bleibt, gibt es keine beschränkte Lösung.

Aufgabe 7: *(4 Punkte)*
Bestimmen Sie die absoluten Extrema der Funktion $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ unter der Nebenbedingung $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \le 1$!

Lösung: $\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$ verschwindet nur im Nullpunkt, und natürlich hat f dort sein absolutes Minimum.
Maxima können offensichtlich nur auf dem Rand $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ liegen, denn f wächst mit jedem der drei Koordinatenquadrate. Für $g(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 1$ ist $\nabla g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4x \\ 6y \\ 8z \end{pmatrix}$; soll dies außerhalb des Nullpunkts proportional zu $\nabla f(x, y, z)$ sein, gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so daß gilt $\lambda x = x, \quad \lambda y = 2y \quad \text{und} \quad \lambda z = 3z$. Diese Gleichungen sind offensichtlich nur dann erfüllbar, wenn mindestens zwei der Koordinaten verschwinden.
Ist x die nichtverschwindende Koordinate, so ist wegen der Nebenbedingung $x^2 = 1$, also auch $f(x, 0, 0) = 1$.
Ist y die nichtverschwindende Koordinate, so ist wegen der Nebenbedingung $2y^2 = 1$, also $f(0, y, 0) = \frac{1}{2}$.
Ist z die nichtverschwindende Koordinate, so ist wegen der Nebenbedingung $3z^2 = 1$, also $f(0, 0, z) = \frac{1}{3}$.
Somit ist das absolute Maximum gleich eins; es wird in den beiden Punkten $(\pm 1, 0, 0)$ angenommen.