Wolfgang K. Seiler A5, C201
Tel. 2515

18. März 2004

Nachklausur Höhere Mathematik II

• • • Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen! • • •

Fragen: *je zwei Punkte*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* $f(z) = e^{\cos z}$ ist eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion.

2) Was ist $\displaystyle\int_\kappa \frac{dz}{z(z+10)}$ für den im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen Kreisbogen κ um Null mit Radius drei?

3) *Richtig oder falsch:* Das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

hat mindestens eine Lösung der Form $x(t) = ate^{bt}$ mit geeigneten Konstanten a, b.

4) *Richtig oder falsch:* Die $n \times n$-Matrix A mit $a_{k\ell} = i(k-\ell)$ hat lauter reelle Eigenwerte.

5) Welche Nullstellen hat das Polynom $f(x) = x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36$?

6) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(3)}(t) - 3\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) - y(t) = 0\,!$$

7) Sie messen dieselbe physikalische Größe x fünfmal mit Ergebnissen $x_i = 8, 9, 10, 11, 12$. Was ist ihr bester Schätzwert für x, und mit welcher Genauigkeit (Standardabweichung) kennen Sie x?

Aufgabe 1: (*6 Punkte*)

Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{16x^2}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx\,!$

Aufgabe 2: (*9 Punkte*)

Sei $f(t) = \begin{cases} 2t & \text{für } |t| \le 1 \\ 3 & \text{für } 1 < t \le 3 \\ -3 & \text{für } -3 \le t < -1 \end{cases}$, periodisch fortgesetzt mit Periode sechs.

a) Skizzieren Sie die Funktion f im Intervall $[-6, 6]$!

b) Ist f gerade, ungerade oder keins von beiden?

c) Berechnen Sie die reelle Fourier-Reihe von f !

d) Für welche $t \in \mathbb{R}$ konvergiert diese gegen $f(t)$? Wohin konvergiert sie sonst?

e) Für welche $t \in \mathbb{R}$ tritt das Gibbs-Phänomen auf?

Aufgabe 3: (*3 Punkte*)

Was ist $\int\limits_{-\infty}^{N} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \delta(t-2^{-k}) t \cos \pi k t \, dt$?

Aufgabe 4: (*6 Punkte*)

a) Skizzieren Sie die Funktion $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 1 \leq |t| \leq 2 \\ 3 & \text{für } 3 \leq |t| \leq 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$!

b) Berechnen Sie die FOURIER-Transformierte von f und geben Sie das Ergebnis in rein reeller Form an!

Aufgabe 5: (*10 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar?

c) Bezüglich welcher Basis hat A welche Dreiecksgestalt Δ?

d) Berechnen Sie die Matrizen $e^{\Delta t}$ und e^{At}!

e) Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$ mit den Anfangsbedingungen $y_1(0) = y_3(0) = 1$ und $y_2(0) = y_4(0) = -1$, und diskutieren Sie deren Langzeitverhalten! Ist dieses typisch für allgemeine Lösungen des Systems?

Aufgabe 6: (*8 Punkte*)

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y^{(4)}(t) - y(t) = 4t - 4 \quad \text{mit} \quad y(0) = 0 = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = y^{(3)}(0) = 0\,!$$

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 10y(t) = 60 + 100t\,!$$

c) Welche Lösungen von *b)* sind beschränkt?

Aufgabe 7: (*4 Punkte*)

Bestimmen Sie die absoluten Extrema der Funktion $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ unter der Nebenbedingung $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 1$!

Formelanhang

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t + \cosh \omega t - 2\}(s) = \frac{2\omega^4}{(s^4 - \omega^4)s}$$

$$\mathcal{L}\{\sin \omega t + \sinh \omega t - 2\omega t\}(s) = \frac{2\omega^5}{(s^4 - \omega^4)s^2}$$

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 18. März 2004, um 13^{10} Uhr