WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

31. März 2004

Modulklausur Höhere Mathematik II

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Bestimmen Sie alle Polstellen der Funktion $f(z) = \dfrac{1}{e^z + e^{-z}}$!

Lösung: Das sind die Nullstellen des Nenners, also jene $z \in \mathbb{C}$, für die $e^z = -e^{-z}$ oder $e^z/e^{-z} = e^{2z} = -1$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $2z$ ein ungeradzahliges Vielfaches von πi, also z ein echt halbzahliges Vielfaches von πi ist.

2) Was ist $\int_\gamma z\,dz$ für $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = t + i\sin t$?

Lösung: Der Integrand ist holomorph mit Stammfunktion $F(z) = \frac{1}{2}z^2$ auf ganz $\mathbb{C}$, d.h.

$$\int_\gamma z\,dz = F\big(\gamma(2\pi)\big) - F\big(\gamma(0)\big) = F(2\pi) - F(0) = 2\pi^2 .$$

3) Richtig oder falsch: Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar.

Lösung: *Richtig:* Da A eine Dreiecksmatrix ist, sieht man sofort, daß sie die Eigenwerte $1, 5, 8$ und 10 hat; damit hat diese 4×4-Matrix vier verschiedene Eigenwerte, die allesamt algebraische und geometrische Vielfachheit eins haben. Insbesondere gibt es eine Basis aus Eigenvektoren, die Matrix ist also diagonalisierbar.

4) Bestimmen Sie die FOURIER-Reihe von $f(t) = 8\sin^4 t$!

Lösung:

$$\begin{aligned} 8\sin^4 t &= 8 \cdot \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^4 = 8 \cdot \frac{(e^{it} - e^{-it})^4}{16} = \frac{e^{4it} - 4e^{2it} + 6 - 4e^{-2it} + e^{-4it}}{2} \\ &= 3 - 4\cos 2t + \cos 4t . \end{aligned}$$

5) Richtig oder falsch: Falls die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch ist, kann jede Komponente des Lösungsvektors des Differentialgleichungssystems $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$ als Linearkombination von Exponentialfunktionen $e^{\lambda t}$ mit geeigneten Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$ geschrieben werden.

Lösung: *Richtig,* denn eine symmetrische reelle Matrix ist diagonalisierbar, und alle ihre Eigenwerte sind reell.

6) Richtig oder falsch: Das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = 6\sqrt[3]{y(t)}$ mit $y(0) = 0$ ist eindeutig lösbar.

Lösung: *Falsch;* Lösungen sind beispielsweise $y(t) = 0$ und $y(t) = \pm 8t^{3/2}$, wobei man letztere findet, wenn man beachtet, daß hier eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen vorliegt.

Aufgabe 1: (*6 Punkte*)

Was ist $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{18x^2}{(x^2+16)(x^2+25)}\,dx$?

Lösung: Für reelles $R > 0$ sei der Integrationsweg γ_R der Halbkreis um den Nullpunkt vom Punkt R durch die obere Halbebene zum Punkt $-R$; in Formeln also

$$\gamma_R\colon [0,\pi] \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto Re^{it}\,.$$

δ_R sei der Integrationsweg, der mit γ_R beginnt und dann entlang der reellen Achse von $-R$ nach R geht. Damit ist δ_R eine geschlossene Kurve, und Integrale entlang δ_R können nach dem Residuensatz berechnet werden.

Zur Berechnung von $\displaystyle\int_{\delta_R} \frac{18z^2}{(z^2+16)(z^2+25)}\,dz$ brauchen wir also zunächst die Pole des Integranden; diese sind allesamt einfach und liegen bei $z = \pm 4i$ und $z = \pm 5i$. Im Innern des von δ_R berandeten Halbkreises liegen (für $R > 5$) nur die beiden Pole mit dem positiven Vorzeichen; wir brauchen also deren Residuen:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{z=4i} \frac{18z^2}{(z^2+16)(z^2+25)} &= \lim_{z\to 4i} \frac{18z^2(z-4i)}{(z^2+16)(z^2+25)} \\
&= \lim_{z\to 4i} \frac{18z^2}{(z+4i)(z^2+25)} = \frac{-18\cdot 16}{8i\cdot(25-16)} = 4i \\
\operatorname{Res}_{z=5i} \frac{18z^2}{(z^2+16)(z^2+25)} &= \lim_{z\to 5i} \frac{18z^2(z-5i)}{(z^2+16)(z^2+25)} \\
&= \lim_{z\to 5i} \frac{18z^2}{(z^2+16)(z+5i)} = \frac{-18\cdot 25}{(16-25)\cdot 10i} = -5i
\end{aligned}$$

Nach dem Residuensatz ist daher für $R > 5$

$$\begin{aligned}
\int_{\delta_R} \frac{18z^2}{(z^2+16)(z^2+25)}\,dz &= 2\pi i\cdot\left(\operatorname{Res}_{z=4i} \frac{18z^2}{(z^2+16)(z^2+25)} + \operatorname{Res}_{z=5i} \frac{18z^2}{(z^2+16)(z^2+25)}\right) \\
&= 2\pi i\cdot(4i-5i) = 2\pi\,.
\end{aligned}$$

Das ist auch der Wert des gesuchten Integrals, denn für $R \to \infty$ geht wegen $\dot\gamma_R(t) = iRe^{it}$ der Integrand von

$$\int_{\gamma_R} \frac{18z^2}{(z^2+16)(z^2+25)}\,dz = \int_0^{\pi} \frac{-R^2e^{2it}}{(16-R^2e^{2it})(25-Re^{2it})}\,dt$$

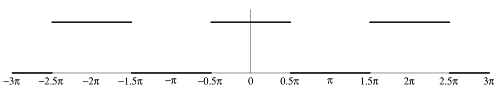
gegen Null, also – wegen des festen Integrationsintervalls $[0,\pi]$ – auch das Integral, so daß das Integral über δ_R für $R \to \infty$ zum Integral über die reelle Achse wird.

Aufgabe 2: (*7 Punkte*)

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei periodisch mit Periode 2π, und für $-\pi < t \le \pi$ sei $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| < \pi/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

a) Skizzieren Sie die Funktion f über dem Intervall $[-3\pi, 3\pi]$!

Lösung:



b) Ist f gerade, ungerade oder keines von beiden?

Lösung: f ist gerade.

c) Berechnen Sie die FOURIER-Reihe von f !

Lösung: Da f eine gerade Funktion ist, gibt es keine Sinusterme.
Der konstante Term ist das Periodenmittel

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}\,,$$

was natürlich auch ohne Integration klar war.
Der Koeffizienten a_k von $\cos kt$ für $k \geq 1$ ist

$$a_k = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos kt\,dt = \frac{1}{k\pi}\left(\sin k\pi 2 - \sin\left(-\frac{k\pi}{2}\right)\right) = \frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}\,.$$

Für gerade k verschwindet der Sinus, für ungerades $k = 2\ell+1$ hat er den Wert $(-1)^\ell$, also ist die gesuchte FOURIER-Reihe

$$S_f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{\ell=0}^{\infty}(-1)^\ell \frac{\cos(2\ell+1)t}{(2\ell+1)\pi}\,.$$

d) k sei eine ganze Zahl. Wohin konvergiert die berechnete FOURIER-Reihe für $t = \frac{1}{2}k\pi$?

Lösung: Für gerades k ist t ein ganzzahliges Vielfaches von π; an diesen Stellen ist f stetig, d.h. die FOURIER-Reihe konvergiert gegen $f(t)$, was für durch vier teilbare k gleich Eins ist und ansonsten Null.
Für ungerades k ist t eine Sprungstelle von 0 auf 1 oder umgekehrt; die Reihe konvergiert also gegen $1/2$.

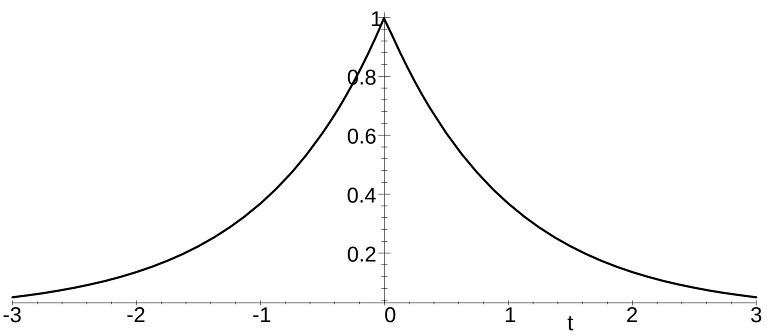
e) Wo tritt bei der Konvergenz dieser FOURIER-Reihe das GIBBS-Phänomen auf?

Lösung: Genau an den Unstetigkeitsstellen, also den echt halbzahligen Vielfachen von π.

Aufgabe 3: (*5 Punkte*)

a) Skizzieren Sie die Funktion $f(t) = e^{-|t|}$!

Lösung:



b) Berechnen Sie die FOURIER-Transformierte $\widehat{f}(\omega)$ von $f(t)$!

c) Geben Sie diese in rein reeller Form an!

Lösung:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t}e^{-i\omega t}\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t}e^{-i\omega t}\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{(1-i\omega)t}\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(1+i\omega)t}\,dt \\
&= \frac{e^{(1-i\omega)t}}{1-i\omega}\bigg|_{-\infty}^{0} - \frac{e^{-(1+i\omega)t}}{1+i\omega}\bigg|_{0}^{\infty} = \frac{1}{1-i\omega} - \frac{1}{1+i\omega} = \frac{(1+i\omega)-(1-i\omega)}{1+\omega^2} = \frac{2}{1+\omega^2}\,.
\end{aligned}$$

d) Was ist die FOURIER-Transformierte der Faltung $f * f$?

Lösung: Die FOURIER-Transformierte einer Faltung ist das Produkt der FOURIER-Transformierten der beiden gefalteten Funktionen, hier also einfach $\widehat{f}(\omega)^2 = \dfrac{4}{(1+\omega^2)^2}$.

Aufgabe 4: (*9 Punkte*)

a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$!

b) Welche algebraischen und geometrischen Vielfachheiten haben diese Eigenwerte?

Lösung: Das charakteristische Polynom von A ist

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-1-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-1-\lambda)^2(1-\lambda) = (1+\lambda)^2(1-\lambda)\,.
\end{aligned}$$

Es gibt also den Eigenwert $\lambda_1 = -1$ mit algebraischer Vielfachheit zwei, sowie den Eigenwert $\lambda_2 = 1$ mit algebraischer und damit auch geometrischer Vielfachheit eins.
Man sieht sofort, daß der Basisvektor $\vec{b}_1$ der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ Eigenvektor zum Eigenwert -1 und $\vec{b}_3$ Eigenvektor zum Eigenwert $+1$ ist. Es geht nun nur noch darum, ob es zu $\lambda_1 = -1$ noch einen von $\vec{b}_1$ linear unabhängigen Eigenvektor gibt. Da

$$A + E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Rang zwei hat, ist das offensichtlich nicht der Fall. Daher hat $\lambda_1 = -1$ nur geometrische Vielfachheit eins.

c) Ist die Matrix A diagonalisierbar?

Lösung: *Nein,* denn sonst müßte die geometrische Vielfachheit eines jeden Eigenwerts gleich der algebraischen sein.

d) Was ist e^{At} für $t \in \mathbb{R}$?

Lösung: Um eine Basis zu finden, bezüglich derer die Matrix Dreiecksgestalt hat, brauchen wir noch einen Hauptvektor zweiter Stufe zu λ_1. Da $(A+E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ ist, kommt dafür beispielsweise der Vektor mit Komponenten $0, 2, -1$ in Frage. Dies liefert eine Basis aus Eigen- und Hauptvektoren bestehend aus

$$\vec{v}_1 = \vec{b}_1, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\vec{b}_2 - \vec{b}_3 \quad \text{und} \quad \vec{v}_3 = \vec{b}_3 \,.$$

Um die Matrix A bezüglich dieser Basis darstellen zu können, brauchen wir noch den Vektor

$$A\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\vec{v}_2 + 2\vec{v}_1 \,.$$

Die Dreiecksgestalt ist somit

$$\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D + N \quad \text{mit} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Der allgemeinen Theorie entsprechend kommutieren N und D, d.h.

$$\begin{aligned} e^{\Delta t} = e^{Dt+Nt} = e^{Dt}e^{Nt} &= \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix} (E + Nt) \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 2te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Um zu sehen, wie diese Matrix bezüglich der Standardbasis $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ aussieht, brauchen wir die Matrix B des Basiswechsels und ihre Inverse; wir haben

$$\vec{v}_1 = \vec{b}_1, \quad \vec{v}_2 = 2\vec{b}_2 - \vec{b}_3, \quad \vec{v}_3 = \vec{b}_3 \Longrightarrow \vec{b}_1 = \vec{v}_1, \quad \vec{b}_2 = \frac{1}{2}(\vec{v}_2 + \vec{v}_3), \quad \vec{b}_3 = \vec{v}_3 \,,$$

also

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} .$$

Da $\Delta = B^{-1}AB$ und $A = B\Delta B^{-1}$ ist, folgt

$$e^{At} = Be^{\Delta t}B^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & \frac{e^{t}-e^{-t}}{2} & e^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & \sinh t & e^{t} \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 5: (*5 Punkte*)

e) Finden Sie alle Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t) + 2y(t) + 3z(t) \qquad & x(0) &= 0 \\ \dot{y}(t) &= x(t) + y(t) + z(t) \qquad & y(0) &= 2\ ! \\ \dot{z}(t) &= 3x(t) + 2y(t) + z(t) \qquad & z(0) &= -2 \end{aligned}$$

Die folgende Beziehung kann dabei ohne Beweis verwendet werden:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow e^{At} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 + 4e^{5t} + 5e^{-2t} & 4e^{5t} - 4 & -5e^{-2t} + 4e^{5t} + 1 \\ e^{5t} - 2 & 8 + 2e^{5t} & 2e^{5t} - 2 \\ -5e^{-2t} + 4e^{5t} + 1 & 4e^{5t} - 4 & 1 + 4e^{5t} + 5e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Lösung: Da dies ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten ist, gibt es nur die eine Lösung

$$\vec{y}(t) = e^{At}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10e^{-2t} - 10 \\ 20 \\ -10e^{-2t} - 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} - 1 \\ 2 \\ -e^{-2t} - 1 \end{pmatrix}.$$

b) Wir verhalten sich diese Lösungen für $t \to \infty$?

Lösung: Da $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-2t} = 0$ ist, nähert sich die Lösung dem konstanten Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c) Sind diese Lösungen stabil gegenüber Störungen der Anfangsbedingungen?

Lösung: Nein! Durch Störungen der Anfangsbedingungen kommt fast immer ein e^{5t}-Term ins Spiel und zieht die Lösung ins Unendliche.

Aufgabe 6: (*6 Punkte*)

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 40x(t) = 400t + 160\,!$$

Lösung: Die homogene Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 40x(t) = 0$$

hat die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 4\lambda + 40 = 0$. Quadratische Ergänzung macht daraus

$$\lambda^2 + 4\lambda + 40 = (\lambda + 2)^2 + 36 = (\lambda + 2)^2 + 6^2 = 0\,,$$

die Nullstellen sind also $\lambda_{1/2} = -2 \pm 6i$ und die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist somit $x(t) = e^{-2t}(a\cos 6t + b\sin 6t) \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}$.

Um die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, reicht es, eine einzige Lösung zu finden, denn die Differenz zweier Lösungen erfüllt die homogene Gleichung.

Erfahrungsgemäß findet man bei Gleichungen dieser Bauart oft eine spezielle Lösung, die von ähnlicher Bauart ist wie die rechte Seite der Gleichung; wir können als unser Glück versuchen mit einem Ansatz der Form $x(t) = ct + d$. Dann ist $\ddot{x}(t) = 0$ und $\dot{x}(t) = c$, die Differentialgleichung führt also auf die Gleichung

$$4c + 40ct + 40d = 400t + 160 \quad \text{oder} \quad 40c = 400 \quad \text{und} \quad 4c + 40d = 160\,.$$

Anhand der beiden letzteren Gleichungen sieht man sofort, daß $c = 10$ und $d = 3$ sein muß, die spezielle Lösung ist also $x(t) = 10t + 3$. Damit ist die gesuchte allgemeine Lösung

$$x(t) = 10t + 3 + e^{-2t}(a\cos 6t + b\sin 6t) \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}\,.$$

b) Wie verhalten sich diese Lösungen für $t \to \infty$?

Lösung: Da e^{-2t} gegen Null geht, konvergieren alle Lösungen gegen die spezielle Lösung $x(t) = 10t + 3$; sie wachsen also allesamt unbeschränkt.