Wolfgang K. Seiler A5, C201
Tel. 2515

5. April 2004

Modulklausur Höhere Mathematik I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Die Abbildung $\varphi\colon \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $\varphi(f)(t) = f(t)\cos(t)$ ist linear.

Lösung: *Richtig,* denn $\varphi(\lambda f+\mu g)(t) = \big(\lambda f(t)+\mu g(t)\big)\cos t = \lambda\big(f(t)\cos t\big)+\mu\big(g(t)\cos t\big) = \lambda\varphi(f)(t) + \mu\varphi(g)(t)$ für alle $f, g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $\lambda, \mu, t \in \mathbb{R}$.

2) Welchen Kern hat die lineare Abbildung $\mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2^n$ mit $\vec{v} \mapsto \vec{v} + \vec{v}$?

Lösung: Ganz $\mathbb{F}_2^n$, denn $\vec{v} + \vec{v} = 2\vec{v} = \vec{0}$ für alle $\vec{v} \in \mathbb{F}_2^n$.

3) In der 10×10-Matrix A sei $a_{ij} = 2i + 3j$. Was ist $\det A$?

Lösung: Da die Differenz zweier aufeinanderfolgender Zeilen stets aus zehn Zweien besteht, hat die Matrix nur den Rang zwei, alsi ost $\det A = 0$.

4) Richtig oder falsch: $\varphi\colon V \to V$ sei eine lineare Abbildung mit der Eigenschaft $\varphi \circ \varphi = \varphi$. Dann ist $\operatorname{Kern}\varphi \cap \operatorname{Bild}\varphi = \{\vec{0}\}$.

Lösung: Richtig, denn für $\vec{v} \in \operatorname{Kern}\varphi \cap \operatorname{Bild}\varphi$ gibt es ein $\vec{w} \in \vec{v}$ mit $\vec{v} = \varphi(\vec{w})$, und $\varphi(\vec{v}) = \varphi\big(\varphi(\vec{w})\big) = \varphi(\vec{w}) = \vec{v}$ verschwindet, da $\vec{v} \in \operatorname{Kern}\varphi$.

5) Richtig oder falsch: Die Vektoren $\binom{1}{i}$ und $\binom{1}{-i}$ bilden eine Orthogonalbasis von $\mathbb{C}^2$.

Lösung: *Richtig;* denn $\binom{1}{i}\binom{1}{-i} = 1 + i \cdot \overline{-i} = 1 + i^2 = 0$.

6) Unter welchen Bedingungen an $a, b, c \in \mathbb{R}$ bilden $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a \\ a+b \\ a+b+c \end{pmatrix}$ *keine* Basis des $\mathbb{R}^3$?

Lösung: Genau dann wenn sie *nicht* linear unabhängig sind, d.h. wenn $a = 0$ *oder* $a + b = 0$ *oder* $a + b + c = 0$ ist.

7) Was ist $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\operatorname{div}\begin{pmatrix} \sin^2 x \\ \cos^3 y \\ e^{4z} \end{pmatrix}$?

Lösung: *Null,* denn die Rotation eines jeden Gradientenfelds verschwindet identisch.

8) Richtig oder falsch: Für $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ verschwindet die Hesse-Matrix $H_f(x, y, z)$ genau dann identisch, wenn es reelle Zahlen a, b, c, d gibt mit $f(x, y, z) = ax + by + cz + d$.

Lösung: *Richtig:* Für $f(x, y, z) = ax + by + cz + d$ verschwinden natürlich alle zweiten partiellen Ableitungen, und verschwinden umgekehrt diese, so sind die ersten partiellen Ableitungen konstant, f hängt also linear von jeder der drei Variablen ab.

9) Was ist $\iint_{\mathcal{K}} dx\, dy$ für $\mathcal{K} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le x \le \pi, \quad 0 \le y \le \sin x\right\}$?

Lösung: Das ist die Fläche unter der Kurve $y = \sin x$ zwischen $x = 0$ und $x = \pi$, also

$$\int_0^\pi \sin x\, dx = -\cos\pi + \cos 0 = 2\,.$$

10) Welchen Korrelationskoeffizienten haben die Zahlenpaare $(\sinh^2 n, \cosh^2 n)$ für $n = -100$ bis $n = 100$?

Lösung: Wegen der Beziehung $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ ist $\cosh^2 x = \sinh^2 x + 1$, die Punkte liegen also auf einer Geraden mit positivem Steigung, so daß der Korrelationskoeffizient gleich eins ist.

Aufgabe 1: (*9 Punkte*)
Der $\mathbb{R}$-Vektorraum $V \le \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sei erzeugt von der Menge

$$M = \left\{1, \sinh x, \cosh x, e^x, \sinh^2 x, \sinh x\cosh x, \cosh^2 x, e^{2x}\right\}.$$

a) Zeigen Sie: Die Funktionen $1, e^x, e^{-x}, e^{2x}$ und e^{-2x} bilden eine Basis von V !
Hinweis: Berechnen Sie $(\cosh x - \sinh x)^2$ auf zwei Arten!

Lösung: Nach der ersten binomischen Formel ist

$$(\cosh x - \sinh x)^2 = \cosh^2 x - 2\sinh x\cosh x + \sinh^2 x\,;$$

andererseits ist

$$\cosh x - \sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^{-x}, \quad \text{also} \quad (\cosh x - \sinh x)^2 = e^{-2x}\,.$$

Damit sehen wir insbesondere, daß

$$e^{-x} = \cosh x - \sinh x \quad \text{und} \quad e^{-2x} = \cosh^2 x - 2\sinh x\cosh x + \sinh^2 x$$

in V liegen; da $1, e^x$ und e^{2x} sogar Elemente von M sind, liegen also alle fünf Funktionen in V.
Außerdem erzeugen sie V, denn wegen

$$\cosh x = \frac12 e^x + \frac12 e^{-x}, \quad \sinh x = \frac12 e^x - \frac12 e^{-x}, \quad \sinh x\cosh x = \frac14 e^{2x} - \frac14 e^{-2x},$$
$$\cosh^2 x = \frac14 e^{2x} + \frac12 + \frac14 e^{-2x} \quad \text{und} \quad \sinh^2 x = \frac14 e^{2x} - \frac12 + \frac14 e^{-2x}$$

lassen sich alle Elemente von M als Linearkombinationen dieser Funktionen darstellen.
Schließlich sind sie auch linear unabhängig, denn ist

$$\alpha e^{-2x} + \beta e^{-x} + \gamma \cdot 1 + \delta e^x + \eta e^{2x} = 0\,,$$

so verschwindet auch der mit e^{2x} multiplizierte Ausdruck

$$\alpha + \beta e^x + \gamma e^{2x} + \delta e^{3x} + \eta e^{4x}\,,$$

das Polynom vierten Grades $\alpha + \beta u + \gamma u^2 + \delta u^3 + \eta u^4$ verschwindet also für alle Werte u, die sich als $u = e^x$ schreiben lassen, d.h. für alle positiven reellen Zahlen. Damit muß es das Nullpolynom sein, d.h. $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \eta = 0$.

b) Finden Sie eine Basis $\mathcal{B} \subseteq M$ von V !

Lösung: Wegen der Beziehungen $1 = \cosh^2 x - \sinh^2 x$, $e^x = \cosh x + \sinh x$ und

$$e^{2x} = (\cosh x + \sinh x)^2 = \cosh^2 x + 2 \sinh x \cosh x + \sinh^2 x$$

kann man beispielsweise auf die drei Erzeugenden $1, e^x$ und e^{2x} verzichten. Somit erzeugt auch

$$\mathcal{B} = \{\sinh x, \cosh x, \sinh^2 x, \sinh x \cosh x, \cosh^2 x\} \subseteq \mathcal{M}$$

den Vektorraum V, und da dieser nach *a)* fünfdimensional ist, ist die fünfelementige Menge $\mathcal{B}$ eine Basis.

c) Zeigen Sie: Die Abbildung $\varphi: V \to V;\ f \mapsto f'' - 4f$ ist linear.

Lösung: Nach *a)* kann jedes $f \in V$ als

$$f(x) = \alpha e^{-2x} + \beta e^{-x} + \gamma + \delta e^x + \eta e^{2x}$$

geschrieben werden. Wegen $\varphi(f) = f''(x) - 4f(x) = -3\beta e^{-x} - 4\gamma - 3\delta e^x$ ist klar, daß auch $\varphi(f)$ wieder in f liegt. Da Differentiation und Addition von Funktionen lineare Operationen sind, ist auch klar, daß φ linear ist.

d) Bestimmen Sie Basen von $\operatorname{Kern} \varphi$ und $\operatorname{Bild} \varphi$!

Lösung: Aus der gerade hergeleiteten Formel für $\varphi(f)$ folgt sofort, daß e^{2x} und e^{-2x} eine Basis des Kerns bilden, während $e^{-x}, 1$ und e^x eine Basis des Bilds sind.

e) Welche Abbildungsmatrix hat φ bezüglich der Basis $e^{-2x}, e^{-x}, 1, e^x, e^{2x}$ von V ?

Lösung: Da in den Spalten der Abbildungsmatrix die Koeffizienten der Bilder der Basisvektoren von V stehen (die wir nach der Formel aus *c)* leicht berechnen können), ist die Abbildungsmatrix gleich

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

f) Welchen Rang hat die hundertste Potenz dieser Abbildungsmatrix?

Lösung: Da sie eine Diagonalmatrix ist mit genau drei nichtverschwindenden Einträgen in der Diagonalen, hat auch jede Potenz diese Eigenschaft und somit Rang drei.

Aufgabe 2: (*8 Punkte*)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} (a+1)x + 2y + 3az &= 6a && (1) \\ (2a+2)x - y - 4az &= -3a && (2) \\ (3a+3)x + 2y + 2az &= 9a && (3) \end{aligned}$$

in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$!

Lösung: Zur Elimination von x aus den Gleichungen (2) und (3) subtrahieren wir die erste Gleichung zweimal von der zweiten und dreimal von der dritten:

$$\begin{aligned} -5y - 10az &= -15a && (4) \\ -4y - 7az &= -9a && (5) \end{aligned}$$

Gleichung (4) kann durch fünf gekürzt werden und beide Gleichungen werden angenehmer, wenn man sie mit (-1) multipliziert; dies führt auf die äquivalenten Gleichungen

$$\begin{aligned} y + 2az &= 3a \qquad (6)\\ 4y + 7az &= 9a \qquad (7) \end{aligned}$$

Hier läßt sich nun y einfach aus (7) eliminieren, indem wir viermal Gleichung (6) subtrahieren; dies führt auf

$$-az = -3a\,.$$

Für $a = 0$ ist diese Gleichung für jedes z erfüllt; für $a \neq 0$ erhalten wir $z = 3$. Gleichung (6) sagt uns dann, daß

$$y = 3a - 2az = \begin{cases} -3a & \text{für } a \neq 0\\ 0 & \text{für } a = 0 \end{cases}$$

ist, und nach Gleichung (1) ist

$$(a+1)x = 6a - 2y - 3az = \begin{cases} 3a & \text{für } a \neq 0\\ 0 & \text{für } a = 0 \end{cases}.$$

Damit ist das Gleichungssystem für $a = -1$ unlösbar, ansonsten ist

$$x = \frac{3a}{a+1}\,,$$

was auch den Fall $x = 0$ für $a = 0$ einschließt. Damit ist

$$\mathcal{L}_a = \begin{cases} \left\{\left(\frac{3a}{a+1}, -3a, 3\right)\right\} & \text{für } a \neq 0, -1\\ \left\{(0,0,\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\} & \text{für } a = 0\\ \emptyset & \text{für } a = -1 \end{cases}.$$

Aufgabe 3: (*5 Punkte*)
Berechnen Sie die QR-Zerlegung der Matrix $A = \begin{pmatrix} 12 & -24 & -7\\ -5 & 10 & 17 \end{pmatrix}$!

Lösung: Wir bezeichnen die drei Spaltenvektoren von A mit $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$. Um zunächst eine Orthogonalbasis des von diesen Spalten aufgespannten Vektorraums zu finden, benutzen wir das GRAM-SCHMIDTsche Orthogonalisierungsverfahren.
Auch ohne Rechnung sieht man sofort, daß $\vec{a}_2 = -2\vec{a}_1$ ist, dieser Vektor spielt also bei der Suche nach einer Basis keine Rolle.
Als nächstes brauchen wir daher einen auf $\vec{a}_1$ senkrecht stehenden Vektor aus dem von $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_3$ aufgespannten Raum; dazu machen wir den üblichen Ansatz

$$\vec{v} = \vec{a}_3 + \lambda\vec{a}_1$$

und bestimmen λ so, daß

$$\vec{v}\cdot\vec{a}_1 = \vec{a}_3\cdot\vec{a}_1 + \lambda\vec{a}_1\cdot\vec{a}_1 = (-12\cdot 7 - 5\cdot 17) + \lambda(12^2 + 5^2) = -169 + 169\lambda = 0$$

ist, d.h. $\lambda = 1$ und

$$\vec{v} = \vec{a}_3 + \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 5\\ 12 \end{pmatrix}.$$

Die Vektoren $\binom{12}{-5}$ und $\binom{5}{12}$ bilden also eine Orthogonalbasis; ihre Länge ist jeweils

$$\sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13\,.$$

Eine Orthonormalbasis des Spaltenraums besteht also beispielsweise aus den beiden Vektoren

$$\vec{b}_1 = \frac{1}{13}\begin{pmatrix}12\\-5\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}_2 = \frac{1}{13}\begin{pmatrix}5\\12\end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$Q = \frac{1}{13}\begin{pmatrix}12 & 5\\-5 & 12\end{pmatrix}.$$

Zur Berechnung von R müssen wir die Vektoren $\vec{a}_i$ als Linearkombinationen der $\vec{b}_j$ darstellen; das ist hier ohne große Rechnung möglich:

$$\vec{a}_1 = 13\vec{b}_1, \quad \vec{a}_2 = -2\vec{a}_1 = -26\vec{b}_2 \quad \text{und} \quad \vec{a}_3 = \vec{v} - \vec{a}_1 = 13\vec{b}_2 - 13\vec{b}_1 = -13\vec{b}_1 + 13\vec{b}_2 .$$

Somit ist

$$R = \begin{pmatrix}13 & -26 & -13\\0 & 0 & 13\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4: (*5 Punkte*)

a) Berechnen Sie Gradient und Hesse-Matrix der Abbildung

$$F\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto xe^x + ye^x \end{cases} !$$

Lösung: Da die Funktion beliebig oft stetig differenzierbar ist, also insbesondere zweimal, genügt es, die partiellen Ableitungen zu berechnen; außerdem können wir das Lemma von Schwarz anwenden, wonach $F_{xy} = F_{yx}$ ist. Wegen

$$\begin{aligned} f(x,y) &= xe^x + ye^x = (x+y)e^x \\ F_x(x,y) &= e^x + (x+y)e^x = (x+y+1)e^x \\ F_y(x,y) &= e^x \\ F_{xx}(x,y) &= (x+y+2)e^x \\ F_{xy}(x,y) = F_{yx}(x,y) &= e^x \\ F_{yy}(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

ist somit $\nabla F(x,y) = \begin{pmatrix}(x+y+1)e^x\\e^x\end{pmatrix}$ und $H_F(x,y) = \begin{pmatrix}(x+y+2)e^x & e^x\\e^x & 0\end{pmatrix}$.

b) Unter welchen Bedingungen kann die Gleichung $F(x,y) = 0$ in der Umgebung des Punkts (x_0, y_0) mit $F(x_0, y_0) = 0$ nach y aufgelöst werden, und welche Ableitung hat die entstehende Funktion $y = f(x)$?

Lösung: $F(x,y) = (x+y)e^x = 0$ ist, da e^x nirgends verschwindet, äquivalent zur Gleichung $x + y = 0$, und die kann natürlich überall nach y aufgelöst werden durch $y = f(x) = -x$ mit Ableitung $f'(x) = -1$.

(Diese vielzu einfache Aufgabe ist Resultat eines Tippfehlers: Eigentlich sollte es heißen $F(x,y) = xe^y + ye^x$.)

c) Bestimmen Sie alle Nullstellen von $f'(x)$!

Lösung: $f'(x) = -1$ hat natürlich keine Nullstellen; siehe Bemerkung zu *b)*.

Aufgabe 5: (*3 Punkte*)
Berechnen Sie das TAYLOR-Polynom vom Grad drei um den Punkt $(0,0)$ für

$$f(x,y) = 1 + e^{x-y}\cos(x+y)\,!$$

Lösung: Da wir um den Nullpunkt entwickeln, können wir direkt mit den Variablen x und y arbeiten. Die TAYLOR-Reihen

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \cdots \quad \text{und} \quad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \cdots$$

sind (hoffentlich) wohlbekannt und zeigen, daß

$$e^{x-y} = 1 + (x-y) + \frac{(x-y)^2}{2} + \frac{(x-y)^3}{6} + \cdots \quad \text{und} \quad \cos(x+y) = 1 - \frac{(x+y)^2}{2} + \cdots$$

ist. Man beachte, daß diese Reihen außer den dastehenden keine weiteren Terme vom Grad höchstens drei in x, y enthalten.
Das gesuchte TAYLOR-Polynom besteht somit aus allen Termen vom Grad höchstens drei von

$$1 + \left(1 + (x-y) + \frac{(x-y)^2}{2} + \frac{(x-y)^3}{6}\right)\left(1 - \frac{(x+y)^2}{2}\right),$$

ist also

$$\begin{aligned} &2 + (x-y) + \frac{(x-y)^2}{2} + \frac{(x-y)^3}{6} - \frac{(x+y)^2}{2} - \frac{(x-y)(x+y)^2}{2} \\ &= 2 + x - y + \frac{(x-y)^2 - (x+y)^2}{2} + \frac{(x-y)^3 - 3(x-y)(x+y)^2}{6} \\ &= 2 + x - y - 2xy - \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} - x^2y + xy^2\,. \end{aligned}$$